Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis
Dicky Susanto, Theja Kurniawan, Savitri K. Sihombing, Eunice Salim, Marianna Magdalena Radjawane, Ummy Salmah, Ambarsari Kusuma Wardani

Penelaah
Sunardi dan Al Azhary Masta

Penyelia
Pusat Kurikulum dan Perbukuan

Ilustrator
Faris M. Naufal

Penyunting
Tri Hartini

Penata Letak (Desainer)
M. Firdaus Jubaedi

Penerbit
Pusat Kurikulum dan Perbukuan
Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Jalan Gunung Sahari Raya No. 4 Jakarta Pusat

Cetakan pertama, 2021
ISBN 978-602-244-536-4 (Jilid Lengkap)
ISBN 978-602-244-537-1 (Jilid 1)

Isi buku ini menggunakan huruf Minion Pro 11/15 pt, Robert Slimbach
x, 302 hlm.: 17,6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi mempunyai tugas penyiapan kebijakan teknis, pelaksanaan, pemantauan, evaluasi, dan pelaporan pelaksanaan pengembangan kurikulum serta pengembangan, pembinaan, dan pengawasan sistem perbukuan. Pada tahun 2020, Pusat Kurikulum dan Perbukuan mengembangkan kurikulum beserta buku teks pelajaran (buku teks utama) yang mengusung semangat merdeka belajar. Adapun kebijakan pengembangan kurikulum ini tertuang dalam Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah.

Kurikulum ini memberikan keleluasan bagi satuan pendidikan dan guru untuk mengembangkan potensinya serta keleluasan bagi siswa untuk belajar sesuai dengan kemampuan dan perkembangannya. Untuk mendukung pelaksanaan Kurikulum tersebut, diperlukan penyediaan buku teks pelajaran yang sesuai dengan kurikulum tersebut. Buku teks pelajaran ini merupakan salah satu bahan pembelajaran bagi siswa dan guru.

Pada tahun 2021, kurikulum ini akan diimplementasikan secara terbatas di Sekolah Penggerak dan SMK Pusat Keunggulan. Hal ini sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 1177 Tahun 2020 tentang Program Sekolah Penggerak. Tentunya umpan balik dari guru dan siswa, orang tua, dan masyarakat di Sekolah Penggerak sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan kurikulum dan buku teks pelajaran ini.

Selanjutnya, Pusat Kurikulum dan Perbukuan mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang terlibat dalam penyusunan buku ini mulai dari penulis, penelaah, reviewer, supervisor, editor, ilustrator, desainer, dan pihak terkait lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Semoga buku ini dapat bermanfaat untuk meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Juni 2021
Kepala Pusat Kurikulum dan Perbukuan,

Maman Fathurrohman, S.Pd.Si., M.Si., Ph.D.
NIP 19820925 200604 1 001

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya dalam menyelesaikan penulisan buku guru ini. Buku ini disusun untuk menjadi pendamping dan pedoman bagi guru yang menggunakan buku siswa yang memenuhi Capaian Pembelajaran Fase E untuk SMA/MA Kelas X sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah.

Bagi para peserta didik, matematika sering kali dianggap pelajaran yang abstrak, sulit, dan kurang relevan dalam kehidupan. Padahal pada hakikatnya, banyak konsep dan prinsip matematika justru muncul di alam dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Harapan kami, buku ini dapat membimbing para guru menjadi agen pengubah mispersepsi mengenai matematika dengan menggunakan pendekatan yang lebih kontekstual melalui permasalahan kehidupan nyata dan melibatkan siswa secara aktif dalam bereksplorasi dengan pertanyaan penuntun.

Sebagian besar pembelajaran matematika dalam buku siswa juga diupayakan menarik perhatian dan minat siswa sehingga "tidak merasa sedang belajar matematika". Buku ini akan memberikan panduan bagi guru dalam mengajak siswa untuk berpikir kritis dan kreatif untuk mengembangkan keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS). Selain itu, di banyak kesempatan guru juga akan diberikan langkah-langkah dalam menerapkan berdiskusi, komunikasi, kegiatan kerja sama, dan menggunakan penggunaan teknologi dalam menyelesaikan permasalahan sehingga siswa diasah kemampuannya sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21. Pada bagian panduan umum buku, guru juga akan mendapatkan penjabaran rinci mengenai perubahan kurikulum, pendekatan pembelajaran, sistem penilaian, serta elemen-elemen esensial lainnya yang terkandung dalam buku siswa. Bagian ini diharapkan dapat memberikan bekal bagi para guru saat mengimplementasikan pendekatan pembelajaran yang sesuai dengan buku siswa.

Kami menghaturkan ucapan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku ini, khususnya para penelaah, yaitu Prof. Dr. Sunardi, M.Pd. (Universitas Negeri Jember) dan Dr. Al Azhary Masta, M.Si. (Universitas Pendidikan Indonesia) untuk bimbingan dan masukan yang berharga dari awal sampai akhir proses penulisan.

Akhir kata, kami berharap buku ini dapat mendukung guru dalam melaksanakan pembelajaran matematika SMA/MA Kelas X yang efektif dan kontekstual, dan semakin banyak siswa yang mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Selamat menabur benih kesukaan bermatematika!

Jakarta, Februari 2021
Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar iii
Prakata iv
Daftar Isi vi
Daftar Gambar ix
Daftar Tabel x

Panduan Umum

A. Pendahuluan 2
B. Capaian Pembelajaran 3
C. Strategi Umum Pembelajaran 5
D. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Siswa 6
E. Alternatif Pembelajaran 10
F. Sistem Penilaian Hasil Belajar 13
G. Kegiatan Tindak Lanjut 13
H. Interaksi Guru dengan Orang Tua 14

Bab 1 Eksponen dan Logaritma

A. Eksponen 20
1. Definisi Eksponen 20
2. Sifat-sifat Eksponen 20
3. Fungsi Eksponen 24
   a. Pertumbuhan Eksponen 27
   b. Peluruhan Eksponen 30
4. Bentuk Akar 34
   a. Hubungan Bilangan Pangkat dan Akar 34
   b. Merasionalkan Bentuk Akar 34

B. Logaritma 39
1. Definisi Logaritma 40
2. Sifat-sifat Logaritma 40

Bab 2 Barisan dan Deret

A. Barisan **66**
1. Barisan Aritmetika 66
2. Barisan Geometri 69

B. Deret Bilangan **74**
1. Deret Aritmetika 75
2. Deret Geometri 76
3. Deret Geometri Tak Hingga 78

Bab 3 Vektor dan Operasinya

A. Notasi, dan Jenis Vektor **94**

B. Vektor dan Sistem Koordinat **104**

C. Operasi Vektor **110**
1. Penjumlahan Vektor 111
2. Pengurangan Vektor 115
3. Perkalian Skalar dengan Vektor 117

Bab 4. Trigonometri

A. Perbandingan Trigonometri **128**
1. Penamaan Sisi Segitiga Siku-siku 129
2. Satu Jenis Perbandingan Trigonometri: tan θ 130
3. Kegunaan Perbandingan Trigonometri tan θ 130

B. Pemanfaatan Perbandingan Trigonometri **136**
1. Perbandingan Trigonometri di Piramida 138
2. Tiga Serangkai Perbandingan Trigonometri 138
3. Sudut Istimewa Perbandingan Trigonometri 139

Bab 5. Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

A. Sistem Persamaan Linear **148**

B. Sistem Pertidaksamaan Linear **156**

Bab 6. Fungsi Kuadrat

A. Karakteristik Fungsi Kuadrat 168
B. Mengkonstruksi Fungsi Kuadrat 181
C. Menyelesaikan Masalah dengan Fungsi Kuadrat 187

Bab 7. Statistika

A. Histogram 198
B. Frekuensi Relatif 208
C. Ukuran Pemusatan 214
D. Ukuran Penempatan 216
E. Ukuran Penyebaran 221

Bab 8. Peluang

A. Distribusi Peluang 238
B. Aturan Penjumlahan 250

Indeks 267
Glosarium 270
Daftar Pustaka 272
Sumber Gambar 274
Biodata Pelaku Perbukuan 276

Daftar Gambar

Gambar 1.1	Menara Hanoi	56
Gambar 1.2	Contoh Menara Hanoi dengan Tiga Cakram	57
Gambar 1.3	Aplikasi Daring untuk Simulasi Menara Hanoi	58
Gambar 2.1	Kertas Dilipat Satu Kali	69
Gambar 3.1	Prediksi Kecepatan Lempeng Bumi	95

Daftar Tabel

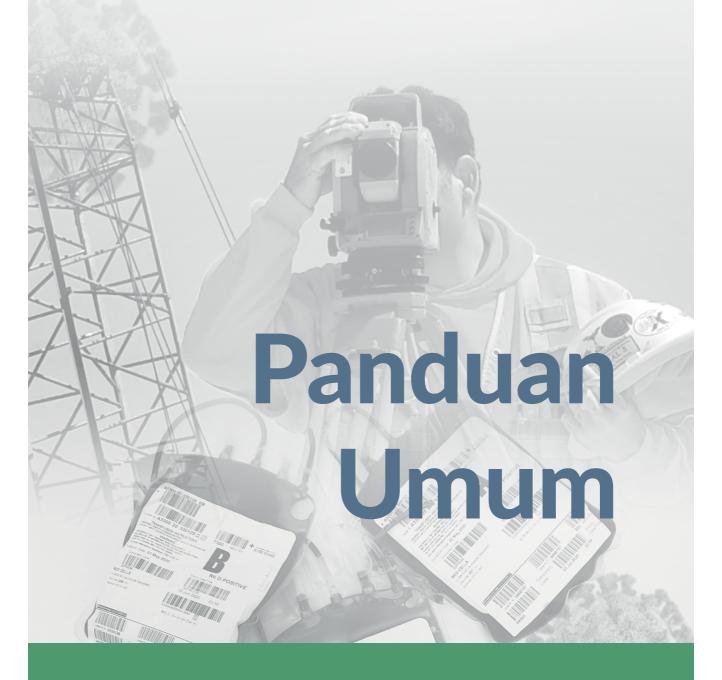
Tabel 1.1 Pertumbuhan Koloni Bakteri 40
Tabel 2.1 Banyak Meja dan Kursi 59
Tabel 2.2 Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk 65
Tabel 2.3 Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas 75
Tabel 2.4 Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri 76
Tabel 3.1 Besar dan Arah Kecepatan Lempeng Bumi 96
Tabel 6.1 Ketinggian Bola 191

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Panduan Umum

A. Pendahuluan

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 71 Tahun 2013 menetapkan bahwa buku teks pelajaran terdiri atas Buku Siswa dan Buku Guru. Buku Guru Matematika untuk SMA/MA Kelas X ini memiliki tiga fungsi utama. Pertama, Buku Guru digunakan sebagai petunjuk penggunaan Buku Siswa Matematika untuk SMA/MA Kelas X. Sebelum melakukan kegiatan pembelajaran dengan Buku Siswa, guru dapat mempelajari terlebih dahulu panduan yang ada pada Buku Guru. Buku Guru ini memuat penjelasan-penjelasan setiap bagian dari Buku Siswa sehingga memberikan arahan kepada guru agar kegiatan pembelajaran berjalan sesuai dengan tujuan yang diharapkan.

Kedua, Buku Guru digunakan sebagai acuan kegiatan pembelajaran di kelas. Pada Buku Guru terdapat penjabaran mengenai tujuan pembelajaran yang akan dicapai dari setiap bab, langkah-langkah kegiatan pembelajaran, alternatif jawaban dari berbagai pertanyaan pemantik yang diberikan ketika proses pembelajaran, ide-ide kegiatan pembelajaran bagi siswa dengan kemampuan yang berbeda di kelas, serta alternatif penyelesaian dari instrumen penilaian. Dengan demikian, buku ini dapat membantu memudahkan guru untuk menentukan aktivitas pembelajaran guna mencapai pengalaman belajar yang diinginkan.

Ketiga, Buku Guru digunakan untuk memberikan gambaran mengenai metode atau pendekatan pembelajaran yang dapat diterapkan pada proses pembelajaran di kelas. Pada Buku Siswa, setiap materi pada semua bab diawali dengan konteks yang diangkat dari kehidupan nyata. Materi yang ada pada Buku Siswa juga disajikan dengan berbagai kegiatan eksplorasi yang dapat menuntun siswa dalam memahami konsep yang disajikan sehingga pada Buku Guru diberikan alternatif metode pembelajaran yang dapat digunakan seperti diskusi dan tanya jawab. Selain itu, diberikan pula alternatif pendekatan pembelajaran yang dapat diterapkan di kelas seperti pendekatan kontekstual dan penemuan terbimbing.

Guru juga diharapkan dapat mengembangkan metode dan pendekatan pembelajaran yang menekankan pada kecakapan abad ke-21. Untuk itu, guru dapat menggali lebih dalam kemampuan berpikir kritis, kreativitas, kerja sama, dan kemampuan berkomunikasi siswa berdasarkan kegiatan pembelajaran yang terdapat pada Buku Siswa. Implementasi kecakapan abad ke-21 pada pembelajaran juga erat kaitannya dengan memacu siswa untuk memiliki keterampilan berpikir sederhana (LOTS) hingga keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Dengan demikian, guru diharapkan dapat memberi ruang, kesempatan, dan pengalaman belajar yang melatih

siswa tidak hanya keterampilan berpikir sederhana, tetapi juga keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Di samping itu, hal ini sesuai dengan visi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, yaitu pembelajaran yang menekankan pada Profil Pelajar Pancasila. Profil Pelajar Pancasila adalah perwujudan pelajar Indonesia sebagai pelajar sepanjang hayat yang memiliki kompetensi global dan berperilaku sesuai dengan nilai-nilai Pancasila, dengan enam ciri utama yaitu: 1) beriman, bertakwa kepada Tuhan YME, dan berakhlak mulia, 2) berkebinekaan global, 3) bergotong royong, 4) mandiri, 5) bernalar kritis, dan 6) kreatif. Beberapa ikon pada Buku Siswa dibuat dengan berorientasi pada Profil Pelajar Pancasila seperti Ayo Bernalar, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berpikir Kreatif. Pada Buku Guru diberikan uraian dari ikon tersebut yang dapat menuntun guru mengembangkan profil pelajar Pancasila dari dalam diri peserta didik.

Dengan berpedoman pada Buku Guru dalam menyampaikan materi yang ada dalam Buku Siswa, tentu saja pada akhirnya peserta didik diharapkan dapat memenuhi capaian pembelajaran yang diharapkan. Peserta didik diharapkan dapat memahami konsep terkait eksponen dan logaritma, barisan dan deret, vektor dan operasinya, trigonometri, sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, fungsi kuadrat, statistika, serta peluang.

B. Capaian Pembelajaran

Deskripsi Capaian Pembelajaran Fase E (Kelas X SMA)

Pada akhir fase E, peserta didik dapat menggunakan bilangan eksponen baik pangkat bulat maupun rasional, menentukan barisan dan deret bilangan, baik barisan dan deret aritmetika maupun barisan dan deret geometris. Peserta didik dapat membentuk dan menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan linear tiga variabel, kuadrat dan eksponensial baik secara grafik maupun aljabar. Mereka memodelkan fenomena hubungan antara dua besaran dengan menggunakan fungsi linear, kuadrat dan eksponensial, dan mengevaluasi kesesuaian model, serta menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel. Peserta didik memahami kekongruenan dan penerapannya dalam konteks transformasi geometri, menentukan perbandingan trigonometri dan memecahkan masalah yang melibatkan segitiga siku-siku. Mereka menggunakan rumus volume dan luas permukaan untuk memecahkan masalah. Peserta didik dapat memilih tampilan data yang sesuai dan menginterpretasi data menurut bentuk distribusi data menggunakan nilai tengah (median, *mean*) dan sebaran (jangkauan interkuartil, standar deviasi).

Capaian berdasarkan domain

Bilangan	Di akhir fase E, peserta didik dapat menggeneralisasi sifat-sifat operasi bilangan berpangkat (eksponen) dan logaritma, serta menggunakan barisan dan deret (aritmetika dan geometri).
Aljabar dan Fungsi	Di akhir fase E, peserta didik dapat menginterpretasi ekspresi eksponensial. Menggunakan sistem persamaan linear tiga variabel, sistem pertidaksamaan linear dua variabel, fungsi kuadrat dan fungsi eksponensial dalam menyelesaikan masalah. Melakukan operasi Vektor.
Geometri	Di akhir fase E, peserta didik dapat menentukan perbandingan trigonometri dan memecahkan masalah yang melibatkan segitiga siku-siku.
Analisis Data dan Peluang	Di akhir fase E, peserta didik dapat menampilkan dan menginterpretasi data menggunakan statistik yang sesuai bentuk distribusi data untuk membandingkan nilai tengah (median, *mean*) dan sebaran (jangkauan interkuartil, standar deviasi) untuk membandingkan dua atau lebih himpunan data. Mereka dapat meringkas data kategorikal untuk dua kategori dalam tabel frekuensi dua arah, menafsirkan frekuensi relatif dalam konteks data (termasuk frekuensi relatif bersama, marginal, dan kondisional), dan mengenali kemungkinan asosiasi dan tren dalam data. Mereka dapat membedakan antara korelasi dan sebab-akibat. Mereka dapat membandingkan distribusi teoretis diskrit dan distribusi eksperimental, dan mengenal peran penting dari ukuran sampel. Mereka dapat menghitung peluang dalam situasi diskrit.

C. Strategi Umum Pembelajaran

Buku Siswa dirancang dengan pendekatan Pembelajaran Berbasis Penemuan Terbimbing (*Discovery Learning*) di mana siswa ada kesempatan melakukan eksplorasi terlebih dahulu dan dituntun melalui pertanyaan pengarah terstruktur (*scaffolded questions*) sehingga dapat menemukan konsep utama yang menjadi tujuan dari pembelajaran. Meskipun demikian, guru dapat menggunakan berbagai pendekatan lain disesuaikan dengan kondisi setempat.

Dalam proses pembelajaran, siswa dapat melakukan aktivitas eksplorasi baik secara individu, berpasangan, maupun berkelompok. Interaksi antarsiswa dan interaksi antarguru dan siswa menjadi dasar bagi siswa untuk membangun pemahaman yang mendalam. Guru memegang peranan yang sangat esensial di dalam mengarahkan aktivitas pembelajaran, membimbing proses berpikir siswa dan memfasilitasi diskusi di dalam kelas untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diharapkan.

Dalam konteks pembelajaran jarak jauh (PJJ), guru dapat menggunakan pendekatan *Flipped Classroom*, yang artinya adalah proses pembelajarannya dibalik dari yang konvensional. Pada umumnya, materi disampaikan di kelas kemudian siswa mengerjakan tugas di luar kelas. Pendekatan *Flipped Classroom* membalikkan urutan ini, yaitu siswa menerima materi di rumah dan mengerjakan latihan di kelas. Dalam konteks PJJ, ini berarti siswa dapat melakukan eksplorasi dalam Buku Siswa dengan mengikuti pertanyaan penuntun secara *asynchronous* (sesi tidak langsung, misalnya melalui *Google Classroom*), kemudian ketika sesi *synchronous* (sesi langsung, misalnya melalui *Google Meet* atau *Zoom*), siswa berdiskusi dan mengerjakan latihan soal dengan bimbingan guru. Guru dapat juga merekam penjelasan materi sehingga siswa dapat menonton pembahasan dari soal eksplorasi termasuk penjelasan konsepnya setelah melakukan eksplorasi secara mandiri. Kegiatan di sesi *synchronous* lebih banyak digunakan untuk diskusi, tanya-jawab, dan memberikan umpan balik kepada siswa.

D. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Siswa

1. Peta Konsep

Peta konsep yang terdapat pada awal bab merupakan diagram yang menunjukkan hubungan antarkonsep yang terdapat dalam setiap bab. Siswa perlu mencermati peta konsep ini untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

2. Ayo Bereksplorasi

Siswa melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum siswa mendalami konsep matematika beserta aplikasinya.

3. Ayo Berpikir Kritis

Siswa berpikir kritis jika dapat menganalisis informasi untuk mengambil kesimpulan atau menilai suatu hal dengan tepat. Keterampilan ini perlu kalian latih terus-menerus karena merupakan salah satu dari keterampilan abad ke-21.

4. Ayo Berpikir Kreatif

Siswa berpikir kreatif jika dapat membuat ide atau alternatif solusi yang baru yang berbeda dari hal umum.

5. Ayo Mencoba

Siswa diharapkan dapat mengerjakan soal atau kegiatan sejenis setelah diberikan penjelasan penyelesaian satu atau lebih dari satu soal.

6. Penguatan Karakter

Siswa diharapkan dapat menghayati dan menerapkan karakter-karakter profil Pancasila yang perlu dipupuk sepanjang hayat dalam kegiatan pembelajaran serta kehidupan sehari-hari.

7. Ayo Berdiskusi

Bertukar pikiran dengan teman-teman dan menyatakan gagasan merupakan kegiatan yang bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan sehingga dapat menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan.

8. Hint

Petunjuk untuk siswa gunakan dalam pemecahan masalah. Arahkan siswa untuk membaca dan menggunakan bagian ini jika siswa mengalami kendala saat mencari solusi dari sebuah masalah.

9. Tahukah Kalian?

Siswa mendapatkan informasi tambahan yang berkaitan dengan materi yang sedang dipelajari yang merupakan aplikasi matematika dalam suatu fenomena atau peristiwa.

10. Ayo Berefleksi

Merenungkan dan melihat kembali secara evaluatif dan mendalam apa yang sudah dipelajari, membandingkannya, dan menarik pelajaran atau kesimpulan sederhana.

11. Ayo Mengingat Kembali

Apa yang telah siswa pelajari di SMP berhubungan dengan apa yang akan dipelajari di kelas X. Siswa akan lebih mudah memahami materi pelajaran kelas X dengan pengetahuan yang telah dipelajari di SMP.

12. Ayo Bekerja Sama

Bekerja sama merupakan salah satu bentuk dari bergotong royong. Siswa bekerja sama untuk menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan matematika sehingga pemahaman siswa terhadap materi pelajaran lebih baik lagi. Selain itu, bekerja sama memerlukan saling memahami dan menghargai satu sama lain.

13. Ayo Menggunakan Teknologi

Teknologi memudahkan siswa untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Siswa dapat memanfaatkan kalkulator dan berbagai aplikasi untuk

mengerjakan tugas. Siswa dapat memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhan mereka.

14. Contoh Soal

Contoh 1

Sederhanakanlah bentuk eksponen $\frac{2^5 \times 2^3}{2^2}$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{2^5 \times 2^3}{2^2} &= \frac{2^{(5+3)}}{2^2} \\ &= \frac{2^8}{2^2} \\ &= 2^{8-2} \\ &= 2^6\end{aligned}$$

Bagian ini diberikan untuk membantu pemahaman siswa atas konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan kaitkan dengan penjelasan sebelumnya agar siswa merasakan manfaat bagian tersebut.

15. Latihan

Latihan 1.1

1. Buktikan sifat eksponen nomor 6 dan 7.
2. Tentukan nilai p sedemikian sehingga persamaan berikut ini tepat

   a. $(3^4)^2 = 3^p$ b. $b^p.b^5 = b^9$ c. $(3\pi)^p = 27\pi^3$
3. Sederhanakanlah

   a. $\left(\frac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3$ b. $(3u^3v^5)(9u^4v)$ c. $\left(\frac{n^{-1}r^4}{5n^{-6}r^4}\right)^2$

Siswa mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan aras tinggi (HOTS).

16. Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah

   a. $\left(\frac{x^{-5}y^4}{xy^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^7y^{-3}}{x^{-4}y^6}\right)^{-\frac{1}{2}}$

   b. $\frac{(m^{10}n^{-2})^3 (m^5n^{-5})^3}{mn}$

Terdapat pada akhir bab, merupakan sarana bagi siswa untuk mengukur pencapaian mereka dalam topik bab. Siswa dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

17. Materi Pengayaan/Proyek

Materi Pengayaan

1. Buatlah suatu barisan geometri, dengan menentukan suku pertama, rasio, dan banyak suku pada tabel di bawah ini.

   Barisan geometri 1.

Suku pertama	....
Rasio	....
Banyak suku	....
... , ... , ... , ... , ..., ...	

Kegiatan yang dapat digunakan untuk memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman atas konsep matematika yang sedang dipelajari. Materi pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/informatika, atau kegiatan eksplorasi/proyek.

18. Refleksi

Refleksi

Dalam bab ini kalian sudah belajar tentang eksponen dan logaritma serta bagaimana hubungan antara eksponen dan logaritma.

1. Apa itu eksponen dan logaritma?
2. Apa perbedaan dari fungsi pertumbuhan eksponensial dan fungsi penurunan eksponensial? Berikan masing-masing satu contoh.
3. Apa hubungan antara eksponen dan logaritma?
4. Berikan 1 contoh penerapan logaritma dalam kehidupan sehari-hari.

Pada akhir bab atau subbab, siswa akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/tepat pemahaman mereka atas pembelajaran pada bagian tersebut.

E. Alternatif Pembelajaran

Dalam Buku Guru ini terdapat saran untuk melakukan diferensiasi pembelajaran (*differentiated instruction*) untuk siswa yang mengalami kesulitan maupun untuk siswa dengan kecepatan belajar yang tinggi (*advanced learner*). Alternatif penggunaan teknologi juga diberikan untuk konteks sekolah di mana siswa tidak memiliki akses teknologi yang dibutuhkan.

Penggunaan Teknologi

Teknologi dapat bermanfaat dalam pembelajaran Matematika. Berikut diberikan beberapa alternatif teknologi yang dapat digunakan. Selain itu, guru juga dapat menggunakan teknologi lain yang dikuasai.

a. Scientific Calculator

Kalkulator jenis ini selain dapat dimanfaatkan untuk menghitung operasi dasar matematika juga dapat dimanfaatkan untuk fungsi-fungsi matematika yang lain, seperti menghitung eksponen dan logaritma, fungsi-fungsi trigonometri, statistika, kombinatorik, vektor, matriks, dan bilangan kompleks. Setiap tipe kalkulator memiliki instruksi spesifik yang dapat dipelajari pada buku manualnya, namun ada beberapa hal yang perlu diingat seperti berikut.

a. **Tampilan**

   Perlu diselidiki bagaimana kalkulator menampilkan bilangan. Contohnya untuk pecahan campuran, ada kalkulator yang menampilkan dalam bentuk $8\frac{1}{2}$ namun ada juga yang menampilkan dalam bentuk 8 ⌟ 1 ⌟ 2. Ada kalkulator yang menampilkan dalam bentuk 5×10^{10} dan ada juga yang menampilkan bilangan yang sama dalam bentuk 5 E 10.

b. **Satuan**

   Untuk fungsi trigonometri, umumnya ada 3 satuan sudut yang dapat dipilih yaitu derajat (deg/D), radian (rad/R), dan gradian (grad/G). Sudut tegak lurus adalah sudut 90^o, π rad, dan 100 grad. Pastikan Anda memilih pengaturan satuan yang tepat.

c. **Urutan menekan tombol**

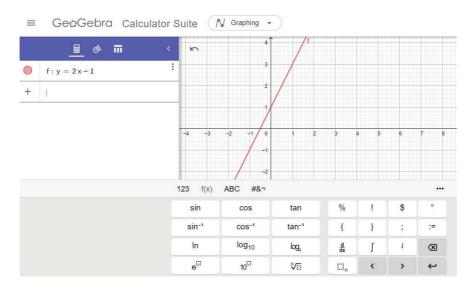
   Ada kalkulator yang untuk menghitung e^2 Anda perlu menekan 2 lalu menekan tombol e^x, namun ada jenis kalkulator yang mengharuskan Anda menekan tombol e^x sebelum menekan 2.

d. Ada juga kalkulator yang dapat menampilkan grafik.

e. Banyak HP Android masa kini yang memiliki fungsi *scientific calculator.*

b. *GeoGebra*

GeoGebra memiliki versi berbasis daring, versi yang dapat digunakan secara luring pada laptop dan juga ada versi Android. *GeoGebra* dapat digunakan untuk menghitung seperti kalkulator, juga dapat digunakan untuk membuat grafik.

Perbedaan utama penggunaan aplikasi dengan kalkulator terletak pada tombol-tombolnya yang merupakan tombol virtual. Untuk menggambarkan grafik, Anda dapat menuliskan fungsinya pada '+'.

c. *Desmos*

Desmos juga memiliki versi berbasis web dan versi yang dapat diunduh pada HP Android/iOS. Ada empat jenis kalkulator yang dapat dipilih dengan *Desmos*.

- Graphing Calculator
- Scientific Calculator
- Four Function Calculator
- Matrix Calculator
- Test Practice
- Geometry Tool

F. Sistem Penilaian Hasil Belajar

Agar semua siswa dapat mencapai tujuan pembelajaran yang dikehendaki, proses pemantauan dan evaluasi pembelajaran perlu dilakukan secara terus-menerus selama proses pembelajaran (penilaian formatif atau *assessment for learning*) dan di akhir proses pembelajaran (penilaian sumatif atau *assessment of learning*). Siswa juga dilibatkan di dalam proses menilai diri (*assessment as learning*) sehingga mengembangkan kemampuan metakognisi (memonitor proses pembelajaran diri).

Guru dapat melakukan penilaian formatif dan memberikan umpan balik kepada siswa melalui aktivitas Ayo Mencoba dan Latihan. Penilaian sumatif dapat dilakukan melalui Uji kompetensi di akhir bab. Siswa memiliki banyak kesempatan untuk melakukan penilaian diri melalui aktivitas Ayo Berefleksi di berbagai bagian selama proses pembelajaran dan juga Refleksi di bagian akhir dari bab. Materi Pengayaan melalui proyek juga merupakan kesempatan bagi guru untuk menilai pengetahuan, keterampilan, dan juga aspek lain seperti kemampuan kolaborasi dan komunikasi di dalam kerja kelompok.

G. Kegiatan Tindak Lanjut

Guru dapat menindaklanjuti proses dan hasil belajar siswa melalui beberapa cara, antara lain remedial, pengayaan, dan layanan konseling. Pada bagian ini akan dijelaskan secara ringkas pelaksanaan remedial dan pengayaan.

1. Kegiatan Remedial

Siswa yang belum mencapai kriteria ketuntasan belajar berkesempatan untuk memperbaiki hasil belajar melalui kegiatan remedial. Setelah menganalisis hasil penilaian sumatif untuk mengidentifikasi permasalahan kesulitan yang dihadapi oleh siswa, guru dapat dengan tepat menyusun kegiatan pembelajaran dan remedial sesuai dengan kebutuhan siswa. Kegiatan remedial dapat dilakukan dengan cara penugasan, tutorial sebaya, ataupun pengerjaan ulang soal-soal Latihan dan Uji Kompetensi yang telah tersedia di Buku Siswa.

2. Pengayaan

Untuk siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced learner*) kegiatan pengayaan dapat diberikan untuk memperdalam dan memperluas kompetensi yang telah dimiliki oleh siswa tersebut. Kegiatan ini dilakukan ketika guru masih memiliki waktu untuk melaksanakan pembelajaran sehingga siswa-siswa yang masuk dalam kategori cepat dapat belajar secara optimal. Kegiatan pengayaan dapat dilakukan dengan berbagai cara, misalnya penugasan, tutorial sebaya, proyek, dan pemecahan masalah. Fitur-fitur dalam Buku Siswa yang dapat digunakan untuk keperluan kegiatan pengayaan antara lain Proyek, Ayo Bekerja Sama, Ayo Berdiskusi, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berpikir Kreatif.

H. Interaksi Guru dengan Orang Tua

Keberhasilan pencapaian siswa dalam pembelajaran tidak hanya bergantung pada guru, namun juga melibatkan peran orang tua atau wali siswa. Guru sebaiknya dapat menjalin kerja sama yang baik dengan orang tua atau wali siswa sebagai rekan (partner) dengan cara mengomunikasikan pentingnya matematika dan bahwa semua siswa memiliki kemampuan untuk belajar matematika kepada orang tua sehingga sikap dan persepsi positif terhadap matematika berkesinambungan baik di sekolah maupun di rumah. Guru perlu membuka diri bagi masukan dari orang tua atau wali, khususnya terhadap minat dan kesulitan yang dihadapi siswa sehingga dapat melakukan diferensiasi pembelajaran sesuai dengan kebutuhan siswa. Guru dapat memberikan ide-ide kepada orang tua atau wali dalam mendukung pembelajaran putra/putrinya, misalnya bagaimana orang tua dapat menyiapkan lingkungan belajar yang kondusif, memberikan dorongan semangat kepada putra/putrinya ketika mereka belum berhasil dalam pembelajaran, maupun memuji keberhasilan sekecil apapun yang ditunjukkan oleh putra/putrinya. Selain itu, guru sebaiknya juga mengomunikasikan sistem atau metode pembelajaran matematika yang digunakan di sekolah kepada orang tua, khususnya jika pendekatan tersebut baru bagi orang tua, misalnya pendekatan *Flipped Classroom*. Hal ini perlu dilakukan untuk menghindari mispersepsi dari orang tua bahwa guru "tidak mengajarkan apa-apa", padahal metode tersebut menuntut siswa untuk belajar secara mandiri di rumah. Penyamaan persepsi penting sehingga proses pembelajaran boleh didukung juga dari pihak orang tua.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab
1

Panduan Khusus

Eksponen dan Logaritma

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa dapat:

1. Mengidentifikasi sifat-sifat eksponen.
2. Mengidentifikasi bentuk akar.
3. Mengidentifikasi fungsi eksponen.
4. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponen.
5. Mengidentifikasi sifat-sifat logaritma.
6. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan logaritma.

Bab Eksponen dan Logaritma bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai eksponen dan logaritma. Siswa dapat mengidentifikasi sifat-sifat eksponen dan logaritma, serta bentuk akar. Siswa juga dapat merepresentasikan fungsi eksponen dan menyelesaikan masalah yang terkait dengan fungsi eksponen. Siswa juga diharapkan mampu mengidentifikasi hubungan antara eksponen dan logaritma. Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma. Siswa diharapkan mampu menggunakan eksponen dan logaritma untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Fungsi logaritma akan dibahas di kelas selanjutnya.

Pada subbab A siswa akan melakukan berbagai eksplorasi yang terkait dengan eksponen. Siswa diberi suatu permasalahan dan memodelkan permasalahan tersebut sebagai suatu bentuk eksponen. Selanjutnya siswa diajak untuk memahami bagaimana sifat-sifat eksponen dan membuktikan sifat-sifat tersebut melalui eksplorasi yang diberikan. Siswa kemudian melanjutkan eksplorasi permasalahan yang terkait dengan fungsi eksponen. Fungsi eksponen yang akan dibahas terkait dengan fungsi pertumbuhan eksponen dan fungsi peluruhan eksponen. Eksplorasi yang terkait dengan kedua fungsi tersebut juga diberikan agar siswa dapat membangun pemahamannya mengenai kedua fungsi tersebut.

Pada subbab selanjutnya siswa akan melakukan eksplorasi yang terkait dengan logaritma. Kegiatan akan dilanjutkan untuk memahami sifat-sifat logaritma. Hal yang juga cukup penting untuk dipahami oleh siswa adalah melihat hubungan antara eksponen dan logaritma. Siswa diharapkan dapat memahami bagaimana permasalahan yang dapat diselesaikan dengan eksponen atau logaritma. kedua konsep ini dalam menyelesaikan masalah-masalah seperti di atas? Dan pada konteks apa lagi kedua konsep tersebut dapat digunakan? Semua akan kalian pelajari pada bab ini.

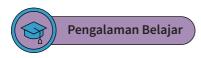
Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
A. Eksponen	8	1. Mengidentifikasi sifat-sifat eksponen. 2. Mengidentifikasi bentuk akar. 3. Mengidentifikasi fungsi eksponen. 4. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponen.	• Bentuk eksponen • Bentuk akar • Fungsi eksponen	• Eksponen • Akar • Fungsi • Pertumbuhan eksponen • Peluruhan eksponen	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan, pemanfaatan teknologi (opsional)	Buku Siswa	
B. Logaritma	4	1. Mengidentifikasi sifat-sifat logaritma 2. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan logaritma.	• Logaritma	• Logaritma	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan, pemanfaatan teknologi (opsional)	Buku Siswa	

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

Pengalaman Belajar

Sebelum memasuki materi mengenai Eksponen dan Logaritma, guru diharapkan dapat menjelaskan pengamalan belajar yang akan didapat siswa setelah mempelajari bab ini.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Meja belajar siswa di kelas
- Kertas grafik
- Aplikasi *GeoGebra* jika memungkinkan

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan siswa kapan konsep Eksponen dan Logaritma muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap dua pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai Eksponen dan Logaritma.

Gunakan bagian Ayo Mengingat Kembali mengenai perkalian berulang yang sudah dipelajari di SMP bahkan SD. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

Bagaimana kalian menuliskan bentuk $2\times2\times2\times2\times2\times2$ dengan lebih singkat?
Bagaimana bentuk sederhana dari perkalian $15\times15\times15\times15$?
Apakah ada bentuk lain dari 2^6?

Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta siswa berdiskusi tentang situasi yang sedang terjadi saat ini terkait dengan penyebaran virus Covid-19. Kemudian minta siswa melakukan Eksplorasi 1.1. Siswa dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

Eksplorasi 1.1

Sebelum membahas permasalahan pada Eksplorasi 1.1, siswa diminta untuk membentuk kelompok yang terdiri atas 4 orang kemudian sajikan permasalahan yang terdapat pada Eksplorasi 1 tentang penyebaran suatu virus di suatu wilayah A. Setelah mencoba langsung, siswa diarahkan untuk menjawab setiap pertanyaan.

1. Berikut ini tabel yang sudah dilengkapi.

Fase Penularan	1	2	3	4	5	6	7	8
Banyak orang yang tertular	2	4	8	16	32	64	128	256

Guru dapat menanyakan kepada siswa bagaimana siswa menemukan bilangan-bilangan tersebut. Bilangan-bilangan tersebut diperoleh karena setiap orang akan menulari dua orang lainnya pada fase selanjutnya.

3. Banyak orang yang tertular pada fase ke-10 adalah 1.024. Pola dari penularan tersebut adalah 2^n sehingga untuk mendapatkan banyaknya orang yang tertular pada fase ke-10 adalah $2^{10} = 1.024$. Siswa mungkin akan menjawab bahwa mereka mengalikan bilangan pada fase sebelumnya dengan 2 atau mengatakan bahwa mereka akan mengalikan 2 sebanyak 10 kali karena yang akan dicari adalah banyaknya orang yang tertular pada fase ke-10.
4. Jika banyak fase yang terjadi adalah n, banyak orang yang tertular virus tersebut direpresentasikan dalam bentuk 2^n.
5. Hubungan antara fase penularan dan banyaknya orang yang tertular virus tersebut adalah untuk mendapatkan banyak orang yang tertular pada fase ke-n, maka pola yang digunakan adalah 2^n di mana n adalah fase penularan.
6.

Jika terdapat 250 orang pada wilayah tersebut maka fase penularannya adalah 7 fase. Pada setiap fase akan terdapat orang yang baru lagi yang akan tertular. Pada fase pertama terdapat 2 orang yang tertular. Karena di awal 1 orang membawa virus tersebut, maka sekarang banyak orang yang tertular adalah 3 orang. Memasuki

fase yang kedua, terdapat 2^2 orang yang tertular atau sebanyak 4 orang. Dengan kata lain, sampai fase ke-2 sudah ada 1+2+4=7 orang yang tertular. Dengan melihat pola ini siswa dapat menentukan fase ke berapa sehingga 250 orang akan tertular. Jadi, diperoleh 1+2+4+8+16+32+62+128=254. Sehingga 250 orang akan tertular semua pada fase ke-7.

Miskonsepsi

miskonsepsi yang mungkin akan terjadi adalah siswa akan menjawab fase ke-8 karena melihat banyaknya orang yang tertular pada fase ke-8 adalah 256. Padahal yang akan dicari sebenarnya adalah jumlah kumulatif orang yang tertular virus tersebut, bukan banyaknya orang yang tertular pada fase tertentu.

Pada bagian Eksplorasi 1.1, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka mulai memikirkan bagaimana cara menggunakan tabel penularan virus untuk mulai memikirkan hubungan antara fase penularan dan banyaknya orang yang tertular kemudian melihat apakah ada pola istimewa dari hubungan tersebut.

A. Eksponen

1. Definisi Eksponen

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan penjelasan konsep definisi eksponen. Minta siswa membandingkan kembali dengan hasil mereka pada eksplorasi dan diskusikan jika masih ada yang masih belum jelas atau membingungkan. Berikan beberapa contoh bentuk eksponen dan mintalah siswa untuk memberikan contoh eksponen berdasarkan definisi yang ada.

2. Sifat-Sifat Eksponen

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 1.2: Sifat-Sifat Eksponen

Pada Eksplorasi 1.2 siswa diajak untuk menemukan sifat-sifat eksponen berikut ini.

1. $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Siswa diminta untuk memperhatikan Tabel 1.1 pada Buku Siswa dan mencoba menyelesaikan beberapa bentuk eksponen yang ada pada Eksplorasi 1.2 yang menggiring mereka untuk menemukan sifat-sifat tersebut. Berikut jawaban dari pertanyaan pada eksplorasi ini.

Jawaban Eksplorasi 1.2:

1. $2^2 \bullet 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$
2. $2^5 \bullet 2^2 = 32 \times 4 = 128 = 2^7$
3. $2^3 \bullet 2^7 = 8 \times 128 = 1024 = 2^{10}$
4. $\frac{2^8}{2^6} = \frac{256}{64} = 4 = 2^2$
5. $\frac{2^{10}}{2^3} = \frac{1024}{8} = 128 = 2^7$
6. $\frac{2^6}{2^4} = \frac{64}{16} = 4 = 2^2$
7. $(2^3)^3 = (8)^3 = 512 = 2^9$
8. $(2^4)^2 = (16)^2 = 256 = 2^8$
9. $(2^2)^5 = (4)^5 = 1024 = 2^{19}$

Dari eksplorasi di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Mintalah siswa untuk memahami sifat-sifat eksponen yang disajikan pada buku. Ajak siswa untuk mengamati syarat yang ada pada masing-masing sifat tersebut. Misalnya pada Sifat 1 mengapa nilai $a \neq 0$ dan seterusnya. Hal ini dapat menjadi diskusi yang menarik untuk dibahas dengan siswa. Setelah itu, lanjutkan kegiatan siswa untuk membuktikan sifat-sifat eksponen yang lainnya pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif.

Bukti Sifat 4

$(ab)^m = a^m \times b^m$, dengan $a, b \neq 0$, *dan m bilangan bulat*

Alternatif 1

$$(ab)^m = \underbrace{ab \times ab \times ab \times \ldots \times ab}_{m \text{ faktor}}$$

$$(ab)^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}} \times \underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{m \text{ faktor}}$$

$$(ab)^m = a^m \times b^m$$

Alternatif 2

Siswa dapat mengambil sebarang bilangan bulat m, a dan b. Lalu melakukan hal yang sama dengan proses yang ada pada Eksplorasi 1.

Untuk siswa yang mengalami kesulitan, guru dapat mengarahkan siswa untuk memulai pembuktian seperti yang ada pada Alternatif 2. Baru kemudian arahkan siswa untuk membuktikan secara formal seperti pada Alternatif 1.

Bukti Sifat 5

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, dengan $b \neq 0$, *dan m bilangan bulat*

Alternatif 1

$$\left(\tfrac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}_{m \ faktor}$$

$$\left(\tfrac{a}{b}\right)^m = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m \ faktor}}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{m \ faktor}} \longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Alternatif 2

Siswa bisa mengambil sebarang bilangan bulat m, a dan b. Lalu melakukan hal yang sama dengan proses yang ada pada Eksplorasi 1.

Diferensiasi

Untuk siswa yang mengalami kesulitan, guru dapat mengarahkan siswa untuk memulai pembuktian seperti yang ada pada Alternatif 2. Baru kemudian arahkan siswa untuk membuktikan secara formal seperti pada Alternatif 1.

Kunci Jawaban Latihan 1.1

1. Sifat 6:

   $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$ dengan $a>0, \dfrac{m}{n}$ dan $\dfrac{p}{n}$ *bilangan rasional dengan* $n \neq 0$

   Bukti:

   Dengan menggunakan Sifat 1 maka berlaku

   $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}}$$

   $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$$

   Sifat 7:

   $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = (a)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}, a>0\ , \dfrac{m}{n}, \dfrac{p}{q}$ *bilangan rasional dengan* $n, q \neq 0$

   Bukti:

   Dengan menggunakan Sifat 1 maka berlaku

   $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = (a)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

2. Menentukan nilai p

   a. $(3^4)^2 = 3^8$

   b. $b^4 \cdot b^5 = b^9$

   c. $(3\pi)^3 = 27\pi^3$

3. Menyederhanakan

a. $\left(\frac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3 = \left(2^{4-3} \times 3^{6-2}\right)^3$
$= \left(2^1 \times 3^4\right)^3$
$= 2^{1.3} \times 3^{4.3}$
$= 2^3 \times 3^{12}$

b. $\left(3u^3\nu^5\right)\left(9u^4\nu\right) = 3.9.u^{3+4}\nu^{5+1}$
$= 3^1.3^2.u^{3+4}\nu^{5+1}$
$= 3^{1+2}.u^{3+4}\nu^{5+1}$
$= 3^3.u^7\nu^6$

c. $\left(\frac{n^{-1}r^4}{5n^{-6}r^{-4}}\right)^2 = \left(\frac{n^{-1-(-6)}r^{4-(-4)}}{5}\right)^2$
$= \left(\frac{n^{-1+6}r^{4+4}}{5}\right)^2$
$= \left(\frac{n^5r^8}{5}\right)^2$
$= \frac{n^{10}r^{16}}{25}$

3. Fungsi Eksponen

Dalam mempelajari fungsi eksponen, kegiatan diawali dengan mengajak siswa melakukan Eksplorasi 1.3

Eksplorasi 1.3: Fungsi Eksponen

Pada bagian ini siswa diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan pengenalan fungsi eksponensial. Masalah yang disajikan adalah mengenai penularan virus. Siswa selanjutnya diminta untuk menjawab setiap pertanyaan yang diberikan

1. Untuk menentukan banyaknya orang yang tertular pada fase selanjutnya, ajak siswa untuk mendata banyak orang yang tertular pada setiap fase, salah satunya dengan bantuan tabel.

   Siswa boleh menggunakan cara yang lainnya juga, misalnya dengan mendata tanpa membuat tabel.

Fase Penularan	1	2	3	4	5	6	7	8
Banyak orang yang tertular	3	9	27	81	243	729	2.187	6.561

Dari data tersebut tampak bahwa banyak orang yang tertular virus pada setiap fasenya membentuk sebuah pola. Misalkan N adalah banyaknya orang yang tertular virus pada setiap fasenya, karena $N = 3^n$.

Siswa cukup menentukan banyak orang yang tertular pada beberapa fase saja dan melihat apa ada hubungan atau pola yang muncul.

2. Banyaknya orang yang tertular pada fase ke-20 adalah $N = 3^{20} = 3.486.784.401$. Siswa bisa mencari hasil penghitungan tersebut dengan menggunakan kalkulator.
3. Dari grafik tersebut diperoleh bahwa yang merepresentasikan peningkatan jumlah orang yang tertular virus tersebut jika proses penularan terjadi terus-menerus adalah grafik nomor III. Jika diperhatikan peningkatan kasus pada setiap fasenya (tabel pada bagian a), peningkatan jumlah orang yang tertular virus tersebut cukup signifikan pertambahannya sehingga grafik III paling tepat menggambarkan kondisi tersebut.

   Guru dapat menanyakan kepada siswa apa yang digambarkan pada grafik I dan II.
4. Fungsi yang tepat menggambarkan penularan virus tersebut adalah fungsi eksponen. Ini yang akan dipelajari oleh siswa pada bagian ini.

Setelah mengerjakan Eksplorasi 1.3, guru kemudian mengajak siswa untuk mendiskusikan permasalahan tersebut. Apakah ada hubungan yang menarik antara fase dan banyaknya orang yang tertular pada setiap fasenya. Eksplorasi 1.1 akan membantu siswa untuk memahami permasalahan ini.

Diskusi dilanjutkan dengan pembahasan tentang fungsi eksponensial. Siswa diperkenalkan dengan definisi fungsi eksponensial. Pada bagian ini guru dapat menambahkan eksplorasi misalnya dengan menunjukkan beberapa bentuk grafik fungsi eksponensial dengan menggunakan aplikasi misalnya *GeoGebra* atau *Desmos*.

Berdasarkan definisi fungsi eksponen,

1. Jika $a = 1$, maka $f(x) = n \times 1^x = n$, maka fungsi tidak lagi menjadi fungsi

eksponensial melainkan fungsi konstan $f(x) = n$, dengan n adalah bilangan real. Hal ini terjadi karena jika $a = 1$, maka 1 dipangkatkan berapa pun akan tetap bernilai 1, sehingga fungsi akan berubah menjadi fungsi konstan.

2. Jika $a = 0$, maka fungsi akan berubah menjadi $f(x) = 0$ yang akan memotong sumbu x di $y = 0$ dan bukan lagi menjadi fungsi eksponen melainkan fungsi linear.

Diferensiasi

Untuk siswa yang sulit memahami hal tersebut, guru bisa memberikan ilustrasi dengan menggambarkan grafik fungsi yang baru dengan $a = 1$ dan $a = 0$.

Guru melanjutkan penjelasan tentang fungsi pertumbuhan eksponensial dan peluruhan eksponensial. Guru kembali mengajak siswa untuk memeriksa Eksplorasi 1.3 dan menyampaikan bahwa permasalahan tersebut adalah salah satu permasalahan yang menunjukkan fungsi pertumbuhan eksponensial.

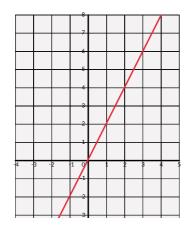
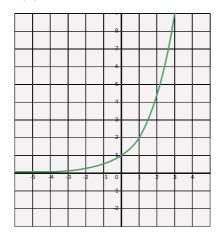
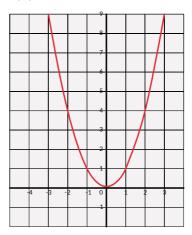
Ayo Berpikir Kreatif

$f(x) = 2x$

$f(x) = 2^x$

$f(x) = x^2$

1. Gambarlah ketiga grafik fungsi tersebut.

$f(x) = 2x$

$f(x) = 2^x$

$f(x) = x^2$

2. Grafik fungsi $f(x) = 2x$ merupakan grafik fungsi linear, grafik fungsi $f(x) = 2^x$ merupakan grafik fungsi eksponensial, sedangkan grafik fungsi $f(x) = x^2$ merupakan grafik fungsi kuadrat. Perubahan nilai pada ketiga grafik tersebut juga tidaklah sama.

3. **Ayo Berdiskusi**

   Dari ketiga grafik fungsi tersebut, yang paling cepat peningkatan atau pertumbuhannya adalah $f(x) = 2^x$. Dapat diperhatikan bahwa setiap perubahan nilai x memberikan perubahan nilai $f(x)$ yang signifikan dibandingkan dengan grafik fungsi linear dan kuadrat.

a. Pertumbuhan Eksponensial

Guru kemudian melanjutkan penjelasan mengenai pertumbuhan eksponensial dengan merujuk pada kurva $f(x) = 3^x$ pada Gambar 3. Penjelasan kemudian dilanjutkan dengan penjelasan mengenai definisi fungsi pertumbuhan eksponen. Selanjutnya guru menjabarkan contoh yang disajikan pada **Contoh 3** dan **Contoh 4** serta dapat memberikan contoh lain dari pertumbuhan eksponensial dari sumber yang lainnya.

- Jika banyak bakteri di awal adalah 200, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 50.(2^x)$.

- Jika banyak bakteri di awal adalah 100, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 100.(2^x)$.
- Jika banyak bakteri di awal adalah 50, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 200.(2^x)$.

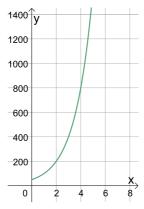
Minta siswa untuk mendiskusikan jawaban mereka pada kegiatan Ayo Berpikir Kritis di atas. Jika ada jawaban yang berbeda, guru memfasilitasi siswa untuk mendiskusikan jawabannya sampai memperoleh jawaban yang tepat.

Kunci Jawaban Latihan 1.2

1. Jumlah bakteri *E. coli* di awal adalah 50 bakteri dan membelah menjadi dua setiap 15 menit.

   a. Tabel Pertumbuhan Bakteri

Fase Pertumbuhan (15 menit)	0	1	2	3	4	5
Banyak bakteri	50	100	200	400	800	1.600

   Gambar grafik fungsinya adalah sebagai berikut:

   b. Fungsi tersebut digambarkan dalam fungsi $f(x)=50.(2^x)$

   c. Setelah 3 jam pertama berarti fase pertumbuhan bakteri berada pada fase ke-12 (bakteri membelah setiap 15 menit).
   Banyak bakteri adalah:

$f(x) = 50.(2^{12})$
$f(x) = 50 \times 4.096$
$f(x) = 204.800$

Setelah 4 jam pertama berarti fase pertumbuhan bakteri berada pada fase ke-16 (bakteri membelah setiap 15 menit).
Banyak bakteri adalah:
$f(x) = 50.(2^{16})$
$f(x) = 50 \times 65.536$
$f(x) = 3.276.800$

2. Banyak kasus HIV-AIDS pada tahun 2015 adalah 36.000.000 jiwa.
Peningkatan tahunan adalah 2%
Tabel Peningkatan Kasus HIV-AIDS

Tahun ke-n	Banyak kasus
0	36.000.000
1	36.000.000 + 2% × 36.000.000 = 36.720.000
2	36.720.000 + 2% × 36.720.000 = 37.454.400
3	37.454.400 + 2% × 37.454.400 = 36.720.000
...	...

Jika dilanjutkan penghitungan tersebut, permasalahan tersebut berbentuk fungsi eksponen. Model matematika yang tepat untuk menentukan banyak kasus HIV AIDS dengan pertumbuhan 2% pada tahun ke- x adalah
$f(x) = 36.000.000 \times (1+0,02)^x$
Misalkan kasus awal dihitung dari tahun 2015, maka kasus pada tahun 2020 dihitung sebagai kasus ke-5.
Banyak kasus yang terjadi pada tahun 2020 adalah
$f(5) = 36.000.000 \times (1+0,02)^5$
$f(5) = 36.000.000 \times 1,104080803$
$f(5) = 39.746.908$

3. Ayo Berpikir Kreatif

Contoh penerapan pertumbuhan eksponensial yang lainnya misalnya pada konteks bunga majemuk, pertumbuhan suatu populasi tertentu, dan sebagainya. Konfirmasi jawaban siswa seperti apa pertumbuhan eksponensial yang terjadi pada contoh yang mereka kemukakan.

b. Peluruhan Eksponensial

Kegiatan dilanjutkan dengan menjelaskan tentang fungsi peluruhan eksponensial. Guru menjelaskan dan menggambarkan bagaimana fungsi peluruhan eksponen terjadi dan mengajak siswa untuk mendiskusikan perbedaan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen. Kegiatan kemudian dilanjutkan dengan memberikan Contoh 5 kepada siswa.

Pada Contoh 5, ajak siswa untuk mendiskusikan mengapa fungsi yang digunakan untuk permasalahan tersebut adalah $f(x) = 50\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Jika siswa mengalami kesulitan, maka guru dapat membimbing siswa kembali untuk melihat peluruhan dosis obat pada setiap fasenya.

Ayo Berpikir Kreatif

Waktu yang dibutuhkan sehingga dosis obat tersebut masih ada di dalam tubuh pasien kurang dari 0,1 mikrogram. Siswa dapat memprediksi dengan mencoba-coba hingga diperoleh dosis kurang dari 0,1 miligram seperti berikut ini.

$f(0) = 50$

$f(1) = \frac{1}{2} \times 50 = 25$

$f(2) = \frac{1}{2} \times 25 = 12,5$

$f(3) = \frac{1}{2} \times 12,5 = 6,25$

$f(4) = \frac{1}{2} \times 6,25 = 3,125$

$f(5) = \frac{1}{2} \times 3,125 = 1,5625$

$f(6) = \frac{1}{2} \times 1,5625 = 0,78125$

$f(7) = \frac{1}{2} \times 0,78125 = 0,391$

$f(8) = \frac{1}{2} \times 0,391 = 0,195$

$f(9) = \frac{1}{2} \times 0,195 = 0,098$

Dengan memprediksi seperti cara di atas maka diperoleh bahwa setelah 9 jam maka dosis obat sudah kurang dari 0,1 mg.

Sebagai alternatif, fungsi logaritma sebenarnya dapat digunakan untuk memudahkan penghitungan, tetapi konsep tersebut baru akan diajarkan pada pertemuan selanjutnya.

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (advanced), mereka diminta mengerjakan bagian **Mandiri** dan/atau bagian **Bernalar** tanpa bantuan, dan memikirkan pertanyaan-pertanyaan yang dapat diajukan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Kunci Jawaban Latihan 1.3

1. Zat yang disuntikkan ke dalam tubuh pasien adalah 200 mg.
   Zat yang dikeluarkan setiap jamnya adalah 50%.
   Banyak zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah:
   $$f(x) = 200\left(\frac{1}{2}\right)^x$$
   Setelah 5 jam, maka banyak zat yang tersisa di dalam tubuh pasien adalah:
   $$f(5) = 200\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
   $$f(5) = 200 \times 0,03125$$
   $$f(5) = 6,25$$
   Sehingga banyaknya zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah 6,25 mg.

2. Massa radiokatif adalah 0,3 kg pada jam 10.00 pagi.
   Tingkat peluruhan 15% per jam.
   Jadi massa radioaktif yang tersisa adalah 100%-15%=85%
   Massa radiokatif yang tersisa dituliskan dalam fungsi $f(x) = 0{,}3(0{,}85)^x$
   Setelah 5 jam, maka banyak zat yang dikeluarkan dari dalam tubuh pasien adalah:
   $$f(5) = 0{,}3(0{,}85)^5$$
   $$f(5) = 0{,}3 \times 0{,}7225$$
   $$f(5) = 0{,}21675 \text{ kg}$$
   $$f(5) = 216{,}75 \text{ gram.}$$

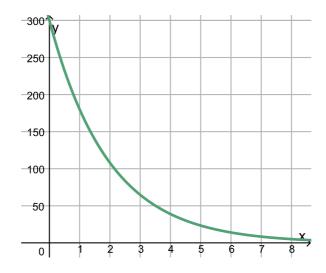
Sehingga banyaknya zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah 300-216,75=83,25 gram.

3. Ketinggian awal bola basket adalah 3 m.
   Tinggi lambungan bola adalah $\frac{3}{5}$ dari tinggi sebelumnya.
   a. Untuk memudahkan, buatlah tabel yang membantu menentukan tinggi lambungan bola pada fase selanjutnya. Misalnya satuan tinggi bola diubah ke dalam cm menjadi 300 cm.

Fase lambungan	0	1	2	3	4	5
Tinggi bola (cm)	300	180	108	64,8	38,88	23,328

Berdasarkan data di atas, maka fungsi yang tepat untuk menggambarkan perubahan ketinggian lambungan bola adalah

$$f(x) = 300\left(\frac{3}{5}\right)^x$$

Grafik fungsi perubahan ketinggian lambungan bola hingga akhirnya menyentuh tanah adalah sebagai berikut.

Bimbing siswa untuk menggambarkan grafik fungsi tersebut dengan menggunakan aplikasi seperti *GeoGebra* atau jika memang tidak memungkinkan siswa dapat menggambarkan secara manual di selembar kertas.

c. Untuk menentukan pada lambungan ke berapa bola akan berhenti melambung, siswa dapat menguji coba setiap fase lambungan hingga menentukan bahwa pada lambungan tersebut bola benar-benar berhenti melambung.

Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Fase	Tinggi
0	300
1	180
2	108
3	64,8
4	38,88
5	23,328
6	13,9968
7	8,39808
8	5,038848
9	3,023309
10	1,813985
11	1,088391
12	0,653035
13	0,391821
14	0,235092
15	0,141055

Jika diperhatikan, pada lambungan ke-12, ketinggian bola sudah 0,65 cm atau dengan kata lain bola berhenti melambung. Akan tetapi, jika melihat data tersebut pada lambungan ke-10 dengan ketinggian 1,8 cm, kemungkinan bola juga sudah berhenti melambung mengingat massa bola yang tidak memungkinkan untuk melambung kembali.

Ajak siswa untuk mendiskusikan hal tersebut. Kapan bola benar-benar berhenti melambung. Untuk memudahkan siswa mencari tinggi bola pada setiap fase lambungan, guru dapat mengarahkan siswa untuk menggunakan *Microsoft Excel.*

Penguatan Karakter

Ajak siswa untuk merenungkan penjabaran tentang hubungan antara sedekah dan banyaknya rezeki yang diberikan Tuhan yang digambarkan dalam bentuk fungsi eksponen. Apakah benar kondisi tersebut dapat digambarkan dalam bentuk eksponensial? Ajak siswa untuk mencari contoh makna lain dari pertumbuhan maupun peluruhan eksponen yang dapat mereka temui dalam kehidupan sehari-hari.

4. Bentuk Akar

a. Hubungan Bilangan Pangkat dan Akar

Pada bagian ini guru menjelaskan hubungan antara bilangan pangkat dan akar. Merujuk pada Contoh 5 sebelumnya, guru menjelaskan bagaimana hubungan antara akar dan bilangan pangkat. Penjelasan kemudian dilanjutkan dengan memberikan bentuk umum dari bentuk akar. Siswa juga diminta untuk mengingat kembali sifat-sifat eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya.

Bentuk $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ tidak benar karena misalkan kalian mengambil nilai $a = 4$ dan $b = 9$, maka diperoleh:

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

Siswa boleh mengambil bilangan lainnya dan membuktikan bahwa hal tersebut tidak berlaku

b. Merasionalkan Bentuk Akar

Pada bagian ini guru menjelaskan bagaimana merasionalkan bentuk akar dari beberapa bentuk akar yang perlu dirasionalkan. Guru mengajak siswa mendiskusikan mengapa bentuk akar tersebut perlu untuk dirasionalkan.

Diferensiasi

Untuk siswa yang mengalami kesulitan, guru dapat memberikan contoh yang lebih konkret.

Ayo Berpikir Kreatif

Coba rasionalkan bentuk-bentuk ini:

$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \frac{c}{a+\sqrt{b}},$ dan $\frac{c}{a-\sqrt{b}}$

b. $$\begin{aligned}\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} \\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a})^2-\left(\sqrt{b}\right)^2} \\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} &= \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} \\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a})^2-\left(\sqrt{b}\right)^2} \\ &= \frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}\end{aligned}$$

d. $$\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c}{a+\sqrt{b}} \times \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$$
$$= \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)}$$
$$= \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{(a)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}$$
$$= \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

e. $$\frac{c}{a-\sqrt{b}} = \frac{c}{a-\sqrt{b}} \times \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$$
$$= \frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)}$$
$$= \frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{(a)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}$$
$$= \frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

Ayo Berdiskusi

Minta siswa untuk saling membandingkan dan mendiskusikan cara yang mereka gunakan masing-masing.

Kunci Jawaban Latihan 1.4

1. Sederhanakan bentuk akar berikut ini.

a. $$\left(\frac{8x^5y^{-4}}{16y^{-\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^5\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{(2)^{\frac{3}{2}}(x)^{\frac{5}{2}}(y)^{-2}}{2^2(y)^{-\frac{1}{8}}}$$
$$= (2)^{\frac{3}{2}-2}(x)^{\frac{5}{2}}(y)^{-2+\frac{1}{8}}$$
$$= \frac{(x)^{\frac{5}{2}}}{(2)^{\frac{1}{2}}(y)^{\frac{15}{8}}}$$

b. $\left(5\sqrt{x^5}\right)\left(3\sqrt[3]{x}\right) = \left(5x^{\frac{5}{2}}\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)$

$$\begin{aligned} &= 15x^{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}} \\ &= 15x^{\frac{15+2}{6}} \\ &= 15x^{\frac{17}{6}} \\ &= 15x^2\sqrt[6]{x^5x} \end{aligned}$$

c. $\left(\dfrac{p^5q^{-10}}{p^5q^{-4}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2}}}{p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{p^{(5\cdot\frac{1}{2})}q^{-10\cdot\frac{1}{2}}}{p^{(5\cdot\frac{1}{2})}q^{-4\cdot\frac{1}{2}}}\right)\left(\dfrac{p^{(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2})}q^{(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})}}{p^{(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})}q^{(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})}}\right)$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{p^{\frac{5}{2}}q^{-5}}{p^{\frac{5}{2}}q^{-2}}\right)\left(\frac{p^{\frac{1}{8}}q^{-\frac{1}{4}}}{p^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{4}}}\right) \\ &= \left(p^{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}q^{-5-(-2)}\right)\left(p^{\frac{1}{8}-(-\frac{1}{4})}q^{-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4})}\right) \\ &= \left(p^0q^{-3}\right)\left(p^{\frac{1+2}{8}}q^0\right) \\ &= \left(1\cdot q^{-3}\right)\left(p^{\frac{3}{8}}\cdot 1\right) \\ &= \frac{p^{\frac{3}{8}}}{q^3} \\ &= \frac{\sqrt[8]{p^3}}{q^3} \end{aligned}$$

2. Rasionalkan bentuk berikut ini.

a. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{b^3}} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{b^3}} \times \dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b^4}} \\ &= \frac{2\sqrt[4]{b}}{b} \end{aligned}$$

b. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{3-5} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{-2} \\ &= -\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{3} \end{aligned}$$

c. $$\frac{m}{\sqrt{m}+n} = \frac{m}{\sqrt{m}+n} \times \frac{\sqrt{m}-n}{\sqrt{m}-n}$$
$$= \frac{m\left(\sqrt{m}-n\right)}{m-n^2}$$

Sebagai penutup dari pembelajaran subbab ini, ajak siswa untuk merefleksikan apa yang sudah mereka pelajari melalui dua pertanyaan:

- Apa itu bilangan eksponen?
  Sampel jawaban: bilangan eksponen adalah bilangan yang berbentuk a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor. a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif.
- Seperti apa bentuk fungsi eksponen?
  Sampel jawaban: Sebuah fungsi eksponen dinyatakan dengan $f(x) = n \times \mathrm{a}^x$, di mana a adalah bilangan pokok, $\mathrm{a}>0$, $a\neq 1$, n adalah bilangan real tak nol dan x adalah sebarang bilangan real.
- Apa yang membedakan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen?
- Sampel jawaban: fungsi pertumbuhan eksponen menunjukkan tingkat pertumbuhan yang berbanding lurus dengan besarnya nilai kuantitas. Penambahan jumlah kuantitasnya bisa dikatakan signifikan, sedangkan peluruhan eksponensial menggambarkan penurunan secara konsisten pada periode waktu tertentu.

Aktivitas ini dapat dilakukan secara bersamaan dengan melakukan *Think-Pair-Share*, yaitu meminta masing-masing siswa memikirkan jawaban pertanyaan refleksi tersebut kemudian berpasangan saling membagikan jawaban, memodifikasi jawaban sesuai hasil berbagi dengan pasangan, dan kemudian menyampaikan di kelas. Guru dapat melakukan penilaian formatif berdasarkan jawaban dari siswa sehingga dapat menekankan kembali konsep utama sesuai dengan tujuan pembelajaran, atau memperbaiki miskonsepsi yang masih dimiliki oleh siswa.

Aktivitas ini juga dapat dilakukan secara mandiri oleh masing-masing siswa dengan menuliskan dalam jurnal refleksi mereka jika waktu yang tersedia singkat dan tidak memungkinkan untuk mengadakan diskusi bersama. Selanjutnya guru dapat mengumpulkan hasil refleksi dan memberikan umpan balik terhadap pemahaman masing-masing siswa.

Banyak sekali contoh penerapan fungsi eksponen dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa di antaranya adalah penggunaan dosis obat, penghitungan bunga majemuk, pertumbuhan, peluruhan zat radioaktif, dan sebagainya.

Ajak siswa untuk mencari tahu pada buku atau situs internet yang menyajikan contoh-contoh fungsi eksponensial dan mendiskusikan temuan mereka. Yang lebih penting adalah mereka dapat menjelaskan seperti apa fungsi eksponensial disajikan pada permasalahan atau konteks yang mereka temukan. Diskusi dapat dilakukan secara berkelompok atau diskusi besar di dalam kelas.

B. Logaritma

Mengingatkan siswa apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai bentuk eksponen dan sifat-sifat eksponen. Jika guru meminta siswa menuliskan refleksi di jurnal, maka dapat menekankan kembali hal-hal yang siswa masih belum terlalu jelas sebagaimana tecermin dalam refleksi mereka.

Tekankan pertanyaan pemantik "*Bagaimana bentuk logaritma dan permasalahan sehari-hari seperti apa yang dapat diselesaikan dengan menggunakan logaritma*" yang akan dijawab melalui pembelajaran subbab ini.

Eksplorasi 1.4: Logaritma

Ajak siswa untuk mendiskusikan tentang permasalahan yang disajikan pada Eksplorasi 1.4. Permasalahan yang ada pada Eksplorasi 1.4 juga masih berhubungan dengan bentuk eksponen, tetapi untuk permasalahan kali ini yang akan dicari adalah waktu yang dibutuhkan sampai banyak bakteri mencapai jumlah tertentu. Berikan kesempatan kepada siswa terlebih dahulu untuk menyelesaikan Eksplorasi 1.4.

Di awal minta siswa untuk membuat tabel pertumbuhan koloni bakteri terlebih dahulu seperti yang sudah dilakukan pada eksplorasi-eksplorasi sebelumnya. Untuk menentukan waktu yang dibutuhkan oleh koloni bakteri hingga berjumlah 64.000 tentu masih mudah untuk siswa. Dengan bantuan tabel akan mudah untuk siswa menentukan bahwa 64.000 bakteri akan muncul setelah 5 jam.

Tabel 1.1 Pertumbuhan Koloni Bakteri

Waktu (x)	0	1	2	3	4	5	10
Banyak bakteri	2.000	4.000	8.000	16.000	32.000	64.000	128.000

Setelah siswa berhasil menentukan waktu yang dibutuhkan hingga terdapat 64.000 bakteri, diskusi dilanjutkan dengan menentukan waktu sehingga dihasilkan 100.000 bakteri. Diskusi ini menarik karena setelah siswa perhatikan pada tabel yang mereka buat, 100.000 tidak terdata. Ajak siswa untuk memperkirakan kira-kira di antara waktu yang mana mereka bisa menentukan waktu sampai dihasilkan 100.000 bakteri. Waktu yang dibutuhkan ternyata tidaklah bulat. Berikan kesempatan kepada siswa untuk memperkirakan waktu yang paling mendekati. Selain itu, bimbing siswa untuk memodelkan permasalahan tersebut dalam bentuk eksponensial.

Setelah siswa selesai memperkirakan waktu yang paling mendekati sehingga bisa dihasilkan 100.000 bakteri, guru kemudian menjelaskan bahwa ada konsep lain yang dapat membantu siswa untuk menentukan waktu tersebut yaitu dengan menggunakan konsep logaritma. Guru dapat menjabarkan dan menjelaskan kembali penjelasan yang sudah dipaparkan di Buku Siswa.

1. Definisi Logaritma

Guru kemudian melanjutkan untuk menjelaskan definisi Logaritma dan hubungannya dengan eksponen. Guru juga menjelaskan beberapa contoh tambahan dan meminta siswa untuk memberikan contoh bentuk eksponen selain yang sudah ada di buku dan mengubahnya ke dalam bentuk logaritma.

2. Sifat-Sifat Logaritma

Penjelasan kemudian dilanjutkan untuk memaparkan sifat-sifat yang berlaku pada logaritma. Diskusikan satu per satu sifat-sifat tersebut dan konfirmasi pemahaman siswa. Ajak dan bimbing siswa untuk membuktikan sifat-sifat logaritma tersebut.

Alternatif pembuktian lain dari ${}^{a}\log(b \times c) = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$

Bukti:

Misalkan
${}^{a}\log b = m$, maka $b = a^{m}$
${}^{a}\log c = n$, maka $c = a^{n}$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} {}^{a}\log(b \times c) &= {}^{a}\log\left(a^{m} \times a^{n}\right) \\ &= {}^{a}\log\left(a^{m+n}\right) \\ &= (m+n)\ {}^{a}\log a \\ &= {}^{a}\log b + {}^{a}\log c \end{aligned}$$

Pembuktian Sifat 5: ${}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$

Misalkan ${}^{a}\log\ b = m$ dan ${}^{a}\log\ c = n$.
Kalian dapat menuliskan bentuk eksponennya sebagai berikut:
$b = a^{m}$ dan $c = a^{n}$
Ingat kembali sifat eksponen $\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$$

$$\frac{b}{c} = a^{m-n}$$

${}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = m - n$ Definisi Logaritma

${}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$ Ingat kembali ${}^{a}\log\ b = m$ dan ${}^{a}\log\ c = n$.

Terbukti

Pembuktian Sifat 6: ${}^{a}\log\left(b^{n}\right)=n\cdot{}^{a}\log b$

$${}^{a}\log\left(b^{n}\right)={}^{a}\log\left(\underbrace{b\times b\times b\times\ldots\times b}_{n\text{ faktor}}\right)$$ Ingat Definisi Eksponen

$${}^{a}\log\left(b^{n}\right)=\underbrace{{}^{a}\log b+{}^{a}\log b+{}^{a}\log b+\ldots+{}^{a}\log b}_{n\text{ faktor}}$$ Ingat Sifat 4

$${}^{a}\log\left(b^{n}\right)=n\cdot{}^{a}\log b$$

Terbukti

Pembuktian Sifat 7: ${}^{a}\log\text{ b}=\frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a}=\frac{1}{{}^{b}\log a}$

Berdasarkan Definisi Logaritma:
${}^{a}\log\ b=\ c$ jika dan hanya jika $b=\ a^{c}$
Terdapat sebarang bilangan pokok m sedemikian sehingga
${}^{m}\log b={}^{m}\log a^{c}$
Berdasarkan sifat 6, maka

$${}^{m}\log b=c\cdot{}^{m}\log a$$

$$c=\frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a}$$

Substitusi nilai $c={}^{a}\log b$, maka diperoleh ${}^{a}\log b=\frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a}$ Selanjutnya, karena m adalah bilangan sebarang, maka dapat dipenuhi $m=\ b$.
Substitusi nilai $m=\ b$, maka diperoleh,

$${}^{a}\log b=\frac{{}^{b}\log b}{{}^{b}\log a}$$

$${}^{a}\log b=\frac{1}{{}^{b}\log a}$$ Ingat Sifat 1

Jadi terbukti ${}^{a}\log b=\frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a}=\frac{1}{{}^{b}\log a}$

Pembuktian Sifat 8: ${}^{a}\log b\times{}^{b}\log c={}^{a}\log c$

Berdasarkan definisi,

$${}^{a}\log b=m\leftrightarrow b=a^{m}$$

$${}^{b}\log c=n\leftrightarrow c=b^{n}$$

Selanjutnya,

$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log b \times {}^b\log b^n$

$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log b \times n \times {}^b\log b$

$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log b \times n \times 1$

$^a\log b \times {}^b\log c = n \cdot {}^a\log b$

$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log b^n$

$^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$

Terbukti

Kunci Jawaban Latihan 1.5

1. Menentukan nilai logaritma

   a. $^9\log 81 = {}^9\log 9^2$

      $^9\log 81 = 2\ {}^9\log 9$

      $^9\log 81 = 2$

   b. $^2\log 64 - {}^2\log 16 = {}^2\log \frac{64}{16}$

      $^2\log 64 - {}^2\log 16 = {}^2\log 4$

      $^2\log 64 - {}^2\log 16 = 2$

   c. $^4\log 16^{10} = {}^4\log (4^2)^{10}$

      $^4\log 16^{10} = {}^4\log 4^{20}$

      $^4\log 16^{10} = 20$

2. $^5\log 4 = m,\ {}^4\log 3 = n$

$$
\begin{aligned}
{}^{12}\log 100 &= \frac{{}^4\log 100}{{}^4\log 12} \\
&= \frac{{}^4\log (4 \times 25)}{{}^4\log (4 \times 3)} \\
&= \frac{{}^4\log 4 + {}^4\log 25}{{}^4\log 4 + {}^4\log 3} \\
&= \frac{{}^4\log 4 + 2 \cdot {}^4\log 5}{{}^4\log 4 + {}^4\log 3} \\
&= \frac{1 + 2 \cdot \frac{1}{m}}{1 + n} \\
&= \frac{1 + \frac{2}{m}}{1 + n}
\end{aligned}
$$

3. Jumlah penduduk = 300.000 jiwa

   Pertumbuhan penduduk per tahun 6%.

   Fungsi yang tepat untuk menggambarkan pertumbuhan penduduk dalam x tahun adalah:

$$f(x) = 300.000(1 + 0,06)^x$$

   Untuk jumlah penduduk 1.000.000 jiwa:

$$\begin{aligned}
1.000.000 &= 300.000(1 + 0,06)^x \\
1.000.000 &= 300.000(1,06)^x \\
\tfrac{1.000.000}{300.000} &= (1,06)^x \\
3,33 &= (1,06)^x \\
x &= {}^{1,06}\log 3,33 \\
x &= 20,645
\end{aligned}$$

   Jadi penduduk akan mencapai 1.000.000 jiwa dalam waktu 20 atau 21 tahun.

4. Tabungan awal = Rp2.000.000,00

   Tabungan akhir = Rp6.500.000,00

   Bunga = 12%

   Fungsi yang tepat untuk menggambarkan tabungan Dini dalam x tahun adalah:

$$f(x) = 2.000.000(1 + 0,12)^x$$

   Untuk tabungan akhir sebesar Rp6.500.000,00:

$$\begin{aligned}
6.500.000 &= 2.000.000(1 + 0,12)^x \\
6.500.000 &= 2.000.000(1,12)^x \\
\tfrac{6.500.000}{2.000.000} &= (1,12)^x \\
3,25 &= (1,12)^x \\
x &= {}^{1,12}\log 3,25 \\
x &= 10,4
\end{aligned}$$

   Jadi, tabungan Dini akan mencapai Rp6.500.000,00 dalam waktu 10 tahun.

Kunci Jawaban Latihan 1.6

Soal Pemahaman

1. Selesaikanlah:

a.
$$\left(\frac{3a^{-2}b}{a^2b^5c^{-1}}\right)^{-3} = \frac{3^{-3}a^6b^{-3}}{a^{-6}b^{-15}c^3} = \frac{a^{6-(-6)}b^{-3-(-15)}}{3^3c^3} = \frac{a^{12}b^{12}}{27c^3}$$

b.
$$\sqrt[3]{\frac{24x^2y^5}{3x^5y^{11}}} = \left(\frac{24x^2y^5}{3x^5y^{11}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8x^{2-5}y^{5-11}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^3x^{-3}y^{-6}\right)^{\frac{1}{3}} = (2)^{3\cdot\frac{1}{3}}(x)^{-3\cdot\frac{1}{3}}(y)^{-6\cdot\frac{1}{3}} = 2x^{-1}y^{-2} = \frac{2}{xy^2}$$

2. Diketahui ${}^a\log b = 2, \quad {}^c\log b = 3,$

${}^a\log\ b = 2, \quad {}^c\log\ b = 3.$

$$\begin{aligned} {}^a\log\left((bc)^3\right)^{\frac{1}{2}} &= {}^a\log(bc)^{\frac{3}{2}} \\ &= \tfrac{3}{2}\ {}^a\log(bc) \\ &= \tfrac{3}{2}\left({}^a\log b + {}^a\log c\right) \\ &= \tfrac{3}{2}\left({}^a\log b + {}^a\log b \cdot {}^b\log c\right) \\ &= \frac{3}{2}\left({}^a\log b + {}^a\log b \cdot \frac{1}{{}^c\log b}\right) \\ &= \tfrac{3}{2}\left(2 + 2 \cdot \tfrac{1}{3}\right) \\ &= \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{8}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

3. Diketahui:

Tabungan awal: Rp500.000,00

Bunga 8% setahun.

a. Tabel Tabungan Alma dalam 5 Tahun Terakhir

Fase	Tinggi
Tahun 1	$1{,}08 \times 500.000 = 540.000$
Tahun 2	$1{,}08^2 \times 500.000 = 583.200$
Tahun 3	$1{,}08^3 \times 500.000 = 629.856$
Tahun 4	$1{,}08^4 \times 500.000 = 680.244$
Tahun 5	$1{,}08^5 \times 500.000 = 734.664$

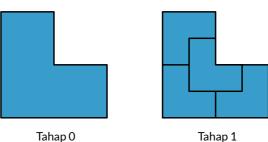
b. Jumlah uang setelah 10 tahun menabung
$= 1{,}08^{10} \times 500.000$
$= 2{,}1589 \times 500.000$
$= 1.079.462$
Jadi, jumlah uang Alma setelah 10 tahun menabung adalah Rp1.079.462,00

c. Akan dicari nilai n yang memenuhi: $1{,}08^n \times 500.000 = 5.000.000$

$$\Leftrightarrow 1,08^n \times 500.000 = 5.000.000$$
$$\Leftrightarrow 1,08^n = \frac{5.000.000}{500.000}$$
$$\Leftrightarrow 1,08^n = 10$$
$$\Leftrightarrow n = {}^{1,08}\log 10$$

Jadi, tabungan Alma akan cukup Rp5.000.000,00 setelah 30 tahun.

Soal Aplikasi

4. Sebuah bangun berbentuk seperti di bawah ini. Bangun tersebut kemudian dibagi menjadi 4 bangun yang kongruen.

a. Tabel yang Merepresentasikan Banyaknya bangun yang Kongruen di Setiap Tahap

Fase ke-	0	1	2	3	4	...
Banyak Bangun yang Kongruen	1	4	16	64	256	...

Tabel dapat dilanjutkan siswa hingga fase yang diinginkan.

b. Pada setiap fase x, masing-masing bangun berubah menjadi 4 bangun kongruen yang lebih kecil, sehingga model matematika untuk menggambarkan permasalahan:

$$f(x) = 4^x$$

dengan $f(x)$ adalah banyak bangun yang kongruen pada fase ke- x.

c. Berdasarkan model matematika yang diperoleh, didapatkan banyaknya bangun kongruen yang dapat dibuat pada tahap ke-12 adalah

$$f(12) = 4^{12} = 16.777.216$$

5. Fraktal tersusun seperti gambar di bawah ini.

a. Tabel yang Merepresentasikan Banyaknya Segmen Garis yang Terbentuk di Setiap Fase

Fase ke-	0	1	2	3	4	...
Banyak segmen garis yang dihasilkan	1	4	16	64	256	...

b. Segmen garis yang dihasilkan setelah 20 tahap pertama.

Pada setiap fase, masing-masing ruas garis berubah menjadi 4 ruas garis lain yang lebih pendek, sehingga model matematika untuk menggambarkan permasalahan

$$f(x) = 4^x$$

dengan $f(x)$ adalah banyak segmen garis yang dihasilkan pada fase ke- x.

Berdasarkan model matematika yang diperoleh, didapatkan banyak segmen garis yang dihasilkan setelah 20 tahap pertama adalah:

$$f(20) = 4^{20} = 1.099.511.627.776$$

6. Penjualan tas pada bulan kedua $\frac{3}{4}$ dari penjualan tas pada bulan pertama. Demikian pula pada bulan ketiga, penjualan tas hanya $\frac{3}{4}$ dari bulan kedua dan seterusnya.

   a. Banyak tas yang terjual pada bulan kedua: $\dfrac{3}{4} \times 500 = 375$ buah.

      Banyak tas yang terjual pada bulan ketiga: $\dfrac{3}{4} \times 375 = 281.75 \sim 281$ buah.

   b. Prediksi penjualan pada bulan ke-10: $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} \times 500 = 28,156 \sim 28$ buah.

   c. Akan dicari bulan ke berapa sehingga prediksi penjualan akan kurang dari 10 tas.

      Sehingga akan dicari nilai n sehingga:

      $\left(\frac{3}{4}\right)^n \times 500 = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{50}$

      $n = {}^{\frac{3}{4}}\log\left(\dfrac{1}{50}\right)$

      $n = 13,59$

      Jadi, penjualan akan kurang dari 10 tas terjadi pada bulan ke-13 atau 14.

7. Intensitas gempa = $5.011.872 I_0$.

   a. Magnitudo gempa dalam Skala Richter

      $M = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = \log\left(\dfrac{5.011.872 I_0}{I_0}\right) = \log 5.011.872 = 6,69 \text{ SR}$

   b. Diketahui $M = 5{,}9\ SR$

      Diperoleh:

      $5,9 = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 10^{5,9} \Leftrightarrow \left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 794.328,234 \Leftrightarrow$

      Sehingga didapatkan intensitas gempanya $794.328{,}234\ I_0$

Soal Penalaran

8. Panjang hipotenusa pada ruang cangkang ke-n

Ruang Cangkang ke-	Panjang Hipotenusa
1	$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
2	$h = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
3	$h = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4}$
4	$h = \sqrt{\left(\sqrt{4}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
...	...
n	$h = \sqrt{\left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{n+1}$

Jadi, panjang hipotenusa pada ruang cangkang ke-n adalah $\sqrt{n+1}$

9. Bilangan satuan dari 7^{123}

Perhatikan polanya.

7^n	Satuan
7^1	7
7^2	9
7^3	3
7^4	1
7^5	7
7^6	9
7^7	3
7^8	1

Terlihat hasil angka satuan dari perpangkatan bilangan 7 berulang setiap 4 kali.

Karena 123 ÷ 4 = 30 sisa 3, berarti satuan pada 7^{123} akan sama dengan satuan dari 7^3 yaitu 3.

10. Model matematika untuk menggambarkan permasalahan di atas adalah $f(n)$ = 100(1-0,4)^n, dengan n adalah banyak filter cahaya yang digunakan.

    Sehingga banyak filter cahaya yang dibutuhkan agar intensitas cahaya menjadi kurang dari 5% adalah

    $5 = 100(1 - 0,4)^n$

    $5 = 100(0,6)^n$

    $\frac{5}{100} = (0,6)^n$

    $n = {}^{0,6}\log \frac{5}{100}$

    $n = 5,86 \sim 6$

    Jadi, banyak filter yang dibutuhkan adalah 6 filter cahaya.

Refleksi

Pada akhir pembelajaran bab ini, minta siswa untuk memikirkan kembali apa saja yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan penuntun sebagai upaya guru untuk memastikan bahwa siswa sudah mencapai tujuan pembelajaran. Uji Kompetensi juga diberikan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran dari bab ini.

1. Apa itu eksponen dan logaritma?
    Eksponen atau bilangan berpangkat didefinisikan sebagai berikut:
    Jika a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor dan ditulis dengan $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\ faktor}$.

    Logaritma didefinisikan sebagai berikut.
    Misalkan a adalah bilangan positif dengan $0<a<1$ atau $a>1$, $b>0$, maka berlaku ${}^a\log b = c$ jika dan hanya jika $b = a^c$. Di mana a adalah bilangan pokok atau basis logaritma, b adalah numerus, dan c adalah hasil logaritma.
2. Apa perbedaan dari fungsi pertumbuhan eksponensial dan fungsi penurunan eksponensial? Berikan masing-masing satu contoh.

    Fungsi pertumbuhan eksponen menunjukkan tingkat pertumbuhan yang berbanding lurus dengan besarnya nilai kuantitas, misalnya pertumbuhan bakteri atau virus (siswa boleh memberikan contoh lainnya).
    Penambahan jumlah kuantitasnya bisa dikatakan signifikan sedangkan peluruhan

eksponensial menggambarkan penurunan secara konsisten pada periode waktu tertentu, misalnya peluruhan zat radioaktif (siswa boleh memberikan contoh lainnya).

3. Apa hubungan antara eksponen dan logaritma?

   Eksponen merupakan kebalikan dari logaritma. Kita kembalikan pada definisi logaritma, yaitu misalkan a adalah bilangan positif dengan $0<a<1$ atau $a>1$, $b>0$, maka berlaku $b = c$ jika dan hanya jika $b = a^c$ di mana a adalah bilangan pokok atau basis logaritma, b adalah numerus, dan c adalah hasil logaritma.

4. Berikan 1 contoh penerapan logaritma dalam kehidupan sehari-hari, misalnya penentuan waktu yang dibutuhkan oleh bakteri untuk membelah menjadi sejumlah bakteri. Jawaban siswa bisa bervariasi.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah.

   a. $$\left(\frac{x^{-5}y^{4}}{xy^{3}}\right)^{-2}\left(\frac{x^{7}y^{-3}}{x^{-4}y^{6}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^{10}y^{-8}}{x^{-2}y^{-6}}\right)\left(\frac{x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{x^{2}y^{-3}}\right)$$
   $$= \left(x^{12}y^{-2}\right)\left(x^{-\frac{11}{2}}y^{\frac{9}{2}}\right)$$
   $$= (x)^{\frac{24-11}{2}}(y)^{\frac{-4+9}{2}}$$
   $$= x^{\frac{13}{2}}y^{\frac{5}{2}}$$

   b. $$\frac{\left(m^{10}n^{-2}\right)^{3}\left(m^{5}n^{-5}\right)^{3}}{mn} = \frac{\left(m^{15}n^{-7}\right)^{3}}{mn}$$
   $$= \frac{m^{45}n^{-21}}{mn}$$
   $$= m^{44}n^{-22}$$
   $$= \frac{m^{44}}{n^{22}}$$

   c. $$\frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} = \frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} \times \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$$
   $$= \frac{(p+q)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{p-q}$$

   d. $$\log\left(\frac{t+6}{36-t^{2}}\right) = \log\frac{t+6}{(6+t)(6-t)}$$
   $$= \log\frac{1}{6-t}$$

2. Diketahui:

   Banyak bakteri = 500

   Pembelahan menjadi 2 terjadi setiap 1 jam.

   a. Fungsi yang menyatakan hubungan antara banyak bakteri setelah jam tertentu adalah $f(x) = 500(2)^{x}$

   b. Waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut berjumlah 5.000 bakteri adalah:
   $$5000 = 500 \cdot 2^{x}$$
   $$10 = 2^{x}$$
   $$x = {}^{2}\log 10$$
   $$= 3,32$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri menjadi 5.000 bakteri adalah 3,32 jam.

c. Waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut mencapai 100.000 bakteri adalah:

$$100000 = 500(2)^x$$
$$\frac{100000}{500} = (2)^x$$
$$200 = (2)^x$$
$$x = {}^2\log 200$$
$$x = 7,64$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri menjadi 100.000 bakteri adalah 7,64 jam.

3. Diketahui:

Ketinggian bola = 5 m

Tinggi lambungan ke-n = $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya.

a. Ketinggian bola tersebut pada lambungan ke-5

Model matematika yang menggambarkan kondisi di atas adalah

$$f(n) = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Ketinggian bola pada lambungan ke-5 adalah:

$$f(5) = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$$
$$= 5 \cdot \frac{243}{1024}$$
$$= 1,186$$

b. Akan ditentukan lambungan ke-n ketika ketinggian bola adalah 0

Perhatikan tabel pengamatan berikut ini:

Fase	Tinggi
0	5
1	3,75
2	2,8125
3	2,109375
4	1,582031
5	1,186523
6	0,889893
7	0,667419
8	0,500565
9	0,375423
10	0,281568
11	0,211176
12	0,158382
13	0,118786
14	0,08909
15	0,066817

Jika diperhatikan, pada lambungan ke-15, ketinggian bola sudah 6 cm atau dengan kata lain bola bisa berhenti melambung. Ajak siswa untuk mendiskusikan hal tersebut. Kapan bola benar-benar berhenti melambung. Untuk memudahkan siswa melakukan mencari tinggi bola di setiap fase lambungan, guru dapat mengarahkan siswa untuk menggunakan Microsoft Excel.

4. Tabungan awal = Rp2.500.000,00
   Bunga = 10% per tahun.
   a. Banyak tabungan Dina pada 5 tahun pertama
      Model matematika untuk permasalahan di atas adalah

$$f(x) = 2.500.000 \times (1 + 0,1)^x$$

Sehingga tabungan pada 5 tahun pertama adalah

$$\begin{aligned} f(5) &= 2.500.000 \times (1+0,1)^5 \\ &= 2.500.000 \times (1,1)^5 \\ &= 2.500.000 \times 1,61051 \\ &= 4.026.275 \end{aligned}$$

b. Lama Dina harus menyimpan uang di bank agar tabungannya tersebut menjadi dua kali lipat (Rp5.000.000) dari tabungan awalnya

Akan dicari nilai x yang memenuhi:

$$\begin{aligned} 5.000.000 &= 2.500.000 \times (1+0,1)^x \\ 2 &= (1,1)^x \\ x &= {}^{1,1}\log 2 \\ &= 7,27 \approx 7 \end{aligned}$$

Jadi, tabungan Alma akan cukup Rp5.000.000,00 setelah 7 tahun.

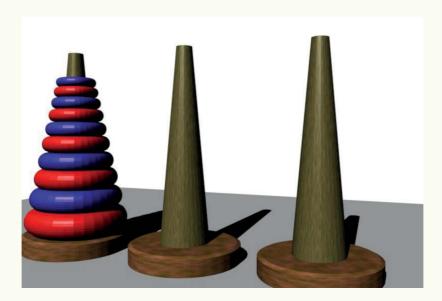
Materi Pengayaan

Menara Hanoi

Menara Hanoi adalah teka-teki terkenal yang ditemukan pada tahun 1883 oleh Edouard Lucas, seorang matematikawan Perancis. Lucas mendasarkan teka-teki itu pada legenda ini:

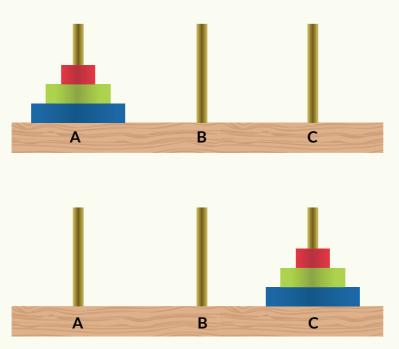
Pada awal waktu, para imam di sebuah kuil diberikan tiga tiang emas. Di salah satu tiang, 64 cakram emas ditumpuk, masing-masing sedikit lebih kecil dari yang di bawahnya. Para imam diberi tugas itu memindahkan semua cakram ke salah satu tiang lainnya sambil berhati-hati untuk mengikuti aturan ini:

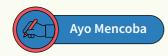
- *Pindahkan hanya satu cakram pada satu waktu.*
- *Jangan pernah meletakkan cakram yang lebih besar di atas cakram yang lebih kecil.*

Saat mereka menyelesaikan tugas, kuil akan runtuh dan dunia akan lenyap.

Gambar 1.1 Menara Hanoi

Sumber: Wikimedia.com/ GeniXPro

Pada materi pengayaan ini, peserta didik akan mencari tahu berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan semua cakram dari satu tiang ke tiang lainnya. Kita akan mulai dengan mengasumsikan cakram begitu besar dan berat sehingga para imam hanya dapat memindahkan satu cakram per menit.

Bayangkan tiang diberi label A, B, dan C dan bahwa cakram mulai di Tiang A. Karena akan terlalu sulit untuk memikirkan untuk memindahkan 64 cakram, maka mungkin lebih baik mempertimbangkan teka-teki dalam bentuk yang jauh lebih sederhana.

Gambar 1.2 Contoh Menara Hanoi dengan Tiga Cakram

1. Misalkan teka-teki dimulai dengan hanya 1 cakram pada Tiang A. Berapa lama yang diperlukan untuk memindahkan cakram ke Tiang B?
2. Misalkan teka-teki dimulai dengan 2 cakram pada Tiang A. Berapa lama yang diperlukan untuk memindahkan kedua cakram ke Tiang B? Apa gerakannya?
3. Coba lagi dengan 3 cakram. Berapa lama waktu yang dibutuhkan? Apa gerakannya?
4. Prediksikan bagaimana total waktu yang dibutuhkan untuk memecahkan teka-teki akan berubah setiap kali menambah satu cakram.
5. Prediksikan berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan 64 cakram. Tuliskan prediksi tersebut untuk dibandingkan di akhir eksplorasi.

Untungnya, peserta didik tidak memerlukan 64 cakram emas untuk mencoba teka-teki Menara Hanoi. Peserta didik dapat memodelkannya dengan beberapa peralatan sederhana. Teka-teki akan terdiri dari 5 "cakram", bukan 64. Kamu akan membutuhkan selembar kertas kosong dan lima balok, berlabel 1, 2, 3, 4, dan 5. Jika peserta didik ada akses jaringan internet, maka peserta didik menggunakan aplikasi daring untuk mensimulasikan ini https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html.

Gambar 1.3 Aplikasi Daring untuk Simulasi Menara Hanoi

Berikan label kertas dengan huruf A, B, dan C dan kemudian tumpuk balok sesuai dengan urutan angkanya, dengan 5 di bagian bawah, di sebelah A.

Untuk memecahkan teka-teki, peserta harus memindahkan semua balok ke posisi lain — baik B atau C — mengikuti aturan berikut:

- Pindahkan hanya satu balok pada satu waktu.
- Jangan pernah meletakkan angka yang lebih besar di atas angka yang lebih kecil.

Ini bukanlah teka-teki yang mudah. Untuk menyelesaikannya, peserta didik mungkin ingin memulai dengan teka-teki hanya menggunakan 2 atau 3 balok. Saat menjelajah, carilah cara yang sistematis untuk memindahkan semua balok ke posisi baru.

6. Coba lagi menyelesaikan teka-teki untuk menara dengan 1, 2, 3, 4, dan 5 balok. Kali ini, hitunglah jumlah gerakan yang diperlukan untuk menyelesaikan teka-teki. Catat hasilnya pada tabel.

Tinggi Menara	1	2	3	4	5
Banyak gerak					

7. Jelaskan pola yang terlihat yang dapat membantu dalam membuat prediksi tentang berapa gerakan yang dibutuhkan untuk menara yang lebih tinggi.
8. Gunakan pola yang ditemukan untuk mengisis tabel berikut ini. Lalu gunakan balok ke-enam untuk menguji prediksi untuk tinggi menara 6.

Tinggi Menara	6	7	8	9	10
Banyak gerak					

9. Tuliskan ekspresi untuk jumlah gerak yang diperlukan untuk menyelesaikan teka-tekai untuk tinggi menara t.

Tambahkan 1 untuk setiap isi pada baris kedua table pada pertanyaan 6, dan kemudian perhatikan polanya sekali lagi.

Kembali ke Legenda

10. Asumsikan bahwa satu cakram dipindahkan per menit. Temukan berapa lama dibutuhkan untuk menyelesaikan teka-teki dengan ketinggian yang terdapat pada tabel berikut. Laporkan waktu dengan satuan yang sesuai. (Kemungkinan setelah beberapa saat, menit tidak lagi berguna.)

Tinggi Menara	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Banyak gerak										
Waktu										

11. Berapa lama dibutuhkan untuk memindahkan keseluruhan dari 64 cakram? Berikan jawaban dalam tahun. Bagaimana jawaban ini dibandingkan dengan prediksi mula-mula di pertanyaan 5?
12. Misalnya kamu dapat memindahkan balok dengan kecepatan yang jauh lebih cepat daripada satu per menit. Bagaimana jika cakram yang digunakan para imam lebih kecil dan lebih ringan, jadi mereka juga bisa bekerja lebih cepat?
    a. Jika satu cakram dipindahkan per detik, berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan teka-teki?
    b. Jika 10 cakram dipindahkan per detik, berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk selesai?

Apa yang Dipelajari?

13. Saat memindahkan potongan teka-teki Menara Hanoi, kamu sering memiliki dua pilihan tempat untuk meletakkannya. Jelaskan bagaimana kamu memutuskan langkah mana yang harus diambil.
14. Misalkan legenda itu benar dan para imam dapat memindahkan cakram dengan tingkat kecepatan luar biasa, yaitu 10 cakram per detik. Apakah menurut kamu mereka akan menyelesaikan teka-teki sepanjang hidup ini? Jelaskan.
15. Tuliskan artikel surat kabar tentang teka-teki Menara Hanoi. Kamu mungkin dapat menyebutkan legenda dan waktu yang diperlukan untuk memindahkan cakram untuk menara dengan ketinggian berbeda.

Sumber: https://id.wikipedia.org/wiki/Menara_Hanoi

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab

2

Panduan Khusus

Barisan dan Deret

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan dapat:

1. mendeskripsikan perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri;
2. menentukan suku *ke-n* dan beda dari barisan aritmetika;
3. menentukan suku $ke\text{-}n$ dan rasio dari barisan geometri;
4. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri;
5. menentukan jumlah suku $ke\text{-}n$ dari deret aritmetika dan deret geometri;
6. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri;
7. menentukan jumlah suku dari deret geometri tak hingga;
8. menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret geometri tak hingga.

Bab Barisan dan Deret bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai barisan dan deret. Siswa akan dapat membedakan barisan aritmetika dan barisan geometri. Selain itu, siswa dapat pula membedakan deret aritmetika dan deret geometri. Pada bab Barisan dan Deret, siswa fokus pada membangun pemahaman bagaimana menentukan suku $ke\text{-}n$ pada barisan dan jumlah suku pada deret bilangan berdasarkan pemahaman mengenai pola bilangan yang sudah dipelajari di SMP.

Pada subbab A, siswa akan melakukan beberapa kegiatan eksplorasi. Eksplorasi menyusun meja segi empat untuk membangun pemahaman mengenai barisan aritmetika. Dilanjutkan dengan eksplorasi melipat kertas untuk menemukan kembali konsep mengenai barisan geometri.

Pada subbab B, siswa akan melakukan kegiatan eksplorasi terkait membangun pemahaman mengenai deret aritmetika dan deret geometri. Selain itu, kegiatan eksplorasi juga diberikan untuk menggiring siswa memahami deret geometri tak hingga konvergen dan divergen. Melalui bab ini juga, siswa diharapkan dapat memahami penerapan konsep barisan dan deret bagi kehidupan sehari-hari.

Pemahaman mengenai barisan dan deret sangat berguna untuk bidang kajian ilmu lain, seperti penghitungan keuangan di bidang ekonomi, perkembangbiakan sel pada kajian penelitian biologi, serta menghitung lintasan pantulan benda pada ilmu fisika. masalah seperti yang sudah disebutkan sebelumnya. Bagaimana cara menggunakan kedua konsep ini dalam menyelesaikan masalah-masalah seperti di atas? Dan pada konteks apa lagi kedua konsep tersebut dapat digunakan? Semua akan kalian pelajari pada bab ini.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk Metode dan Aktivitas	Sumber Utama
A. Barisan	4	1. Mendeskripsikan perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri. 2. Menentukan suku $ke\text{-}n$ dan beda dari barisan aritmetika. 3. Menentukan suku $ke\text{-}n$ dan rasio dari barisan geometri. 4. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri.	• Barisan aritmetika • Barisan geometri	• Barisan • Aritmetika • Geometri • Beda • Rasio • Suku $ke\text{-}n$	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan, pemanfaatan teknologi (opsional)	Buku Siswa
B. Deret	4	1. Menentukan jumlah suku ke-n dari deret aritmetika dan deret geometri. 2. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri. 3. Menentukan jumlah suku dari deret geometri tak hingga. 4. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret geometri tak hingga.	• Deret aritmetika • Deret Geometri • Deret geometri tak hingga	• Deret • Jumlah n suku pertama • Deret tak hingga • Konvergen • Divergen	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan.	Buku Siswa

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

Pengalaman Belajar

Sebelum memasuki materi mengenai Barisan dan Deret, guru diharapkan dapat menjelaskan pengamalan belajar yang akan didapat siswa setelah mempelajari bab ini.

Setelah mempelajari bab ini, kalian dapat:

1. Mendeskripsikan perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri.
2. Menentukan suku $ke\text{-}n$ dan beda dari barisan aritmetika.
3. Menentukan suku $ke\text{-}n$ dan rasio dari barisan geometri.
4. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri.
5. Menentukan jumlah suku $ke\text{-}n$ dari deret aritmetika dan deret geometri.
6. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri.
7. Menentukan jumlah suku dari deret geometri tak hingga.
8. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret geometri tak hingga.

Kebutuhan Sarana Prasarana dan Media Pembelajaran

- Meja belajar siswa di kelas
- Kertas berbentuk persegi atau persegi panjang

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan kepada siswa kapan konsep **Barisan Bilangan** muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan dua pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap dua pertanyaan ini selama pembelajaran subbab mengenai **Barisan**.

Gunakan bagian **Ayo Mengingat Kembali** mengenai pola bilangan yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

- Apa itu pola bilangan?
- 2 4 6 8 10 apakah termasuk pola bilangan? Jika ya, termasuk pola bilangan apa susunan bilangan tersebut?
- Ada berapa suku pola bilangan tersebut?
- Dapatkah kamu menyebutkan pola bilangan lain yang terdiri dari 5 suku?

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta siswa menyebutkan contoh lain dari pola bilangan yang berbeda-beda. Kemudian minta siswa melakukan Eksplorasi 1. Siswa dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

Eksplorasi 2.1 Meja Segi Empat

Sebelum membahas permasalahan pada eksplorasi 2.1, siswa diminta untuk membentuk kelompok yang terdiri dari 4 orang. Lalu, pada bagian ini, siswa dapat diminta untuk bereksplorasi dengan meja dan kursi yang ada di kelas. Setelah mencoba langsung, siswa diarahkan untuk melengkapi Tabel 2.1

a. **Tabel 2.1 Banyak Meja dan Kursi**

Banyak meja	1	2	3	4	5	6
Banyak kursi	4	6	**8**	**10**	**12**	**14**

b. **Alternatif jawaban**: Karena jumlah orang membentuk pola bilangan 4 6 8 10 12 14 16 18 20. Angka 20 merupakan suku ke-9. Sehingga meja yang dibutuhkan ada 9.

A. Barisan

Materi barisan diawali dengan menggiring siswa menjawab pertanyaan singkat terkait kegiatan eksplorasi 2.1.

Berikut jawaban untuk pertanyaan arahan pada bagian 2.1.

Terdiri dari berapa suku barisan bilangan tersebut? **4 suku**

Suku ke-1 dilambangkan dengan U_1 = **4**

Suku ke-2 dilambangkan dengan U_2 = **6**

Suku ke-3 dilambangkan dengan U_3 = **8**

Suku ke-4 dilambangkan dengan U_4 = **10**

Dari kegiatan Eksplorasi 2.1, siswa digiring untuk membangun pemahaman bahwa pola bilangan dengan aturan tertentu akan membentuk barisan bilangan.

1. Barisan Aritmetika

Pada bagian ini, siswa diberikan pemahaman mengenai barisan aritmetika melalui pertanyaan-pertanyaan singkat. Berikut alternatif jawaban pada pertanyaan bagian 2.1.1.

- Selanjutnya, aturan apa yang ada pada barisan bilangan 4, 6, 8, 10 tersebut? **Suku berikutnya hasil dari suku sebelum ditambah 2.**
- Operasi penghitungan apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas? **Penjumlahan**

  4 6 8 10

  +2 +2 +2
- Berapakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan?

  $U_2 - U_1 = \mathbf{6 - 4 = 2}$

  $U_3 - U_2 = \mathbf{8 - 6 = 2}$

  $U_4 - U_3 = \mathbf{10 - 8 = 2}$
- Apakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama? **Iya.**

Guru memberikan penegasan bahwa s**uatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN ARITMETIKA.**

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami barisan aritmetika, guru diharapkan dapat menambahkan contoh lain yang merupakan barisan aritmetika dan bukan barisan aritmetika serta meminta siswa mengidentifikasi beda dari barisan aritmetika.

Eksplorasi 2.2 Gedung Pertunjukan Seni

Pada eksplorasi 2.2, siswa diajak menemukan kembali rumus menentukan suku $ke\text{-}n$ dari barisan aritmetika dengan konteks jumlah kursi pada gedung pertunjukan seni. Siswa diminta untuk menentukan jumlah kursi pada baris ke-15. Beri kesempatan terlebih dahulu kepada siswa untuk menjawab dengan cara mereka sendiri.

Lalu siswa diajak menjawab beberapa pertanyaan yang menggiring ke pemahaman mengenai rumus suku $ke\text{-}n$ pada barisan aritmetika.

- Berapa beda atau selisih banyak kursi pada tiap baris? **4 kursi**
- Baris ke-1 = 20
- Baris ke-2 = 24 = 20+4 (20 ditambah 4 sebanyak 1 kali) = 20+(1×4)
- Baris ke-3 = 28 = 20+4+4 (20 ditambah 4 sebanyak 2 kali) = 20+(2×4)
- Baris ke-4 = 32 = 20+4+4+4 (20 ditambah 4 sebanyak 3 kali) = 20+(3×4)
- Baris ke-5 = 36 = 20+4+4+4+4 (20 ditambah 4 sebanyak 4 kali) = 20+(4×4)
- Jadi, pada Baris ke-15 = 20 ditambah 4 sebanyak 14 Kali = 20+(14 ×4) = 76

Setelah mendapatkan jumlah kursi pada baris ke-15, maka siswa diajak menyimpulkan rumus menentukan suku ke-n pada barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n - 1)\ b$.

Ayo Mencoba

Jika menyelesaikan soal pada contoh dengan menggunakan persamaan 2, maka akan menghasilkan jawaban yang sama.

Setelah pemaparan konsep mengenai menentukan jumlah suku $ke\text{-}n$ barisan aritmetika, siswa diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep barisan aritmetika, siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal latihan 1.

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (advanced), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Kunci Jawaban Latihan 2.1

1. a. 8, 5, 2, -1, …, …

   Soal di atas adalah barisan aritmetika dengan beda = -3

   Dua suku berikutnya: -4 ,-7

   b. 2, 3, 5 , 8

   Barisan di atas bukan barisan aritmetika.

   Dua suku berikutnya: 12, 17

   c. -15,-11,-7, … , …

   Soal di atas adalah barisan aritmetika dengan beda = 4

   Dua suku berikutnya: -3, 1

   d. 10, 8, 4, -2, …, …

   Barisan di atas bukan barisan aritmetika.

   Dua suku berikutnya: -10, -20

2. b = -2 – 5 = -7

   $U_n = a + (n - 1)b$

   $U_{50} = 5 + (50 - 1)(-7)$

   $U_{50} = -338$

3. $U_3 = -4\frac{1}{2}$ $\qquad$ $U_8 = -2$

$$U_3 = a + 2b = -4\frac{1}{2}$$

$$U_8 = a + 7b = -2 \quad -$$

$$-5b = -2\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{-2\frac{1}{2}}{-5}$$

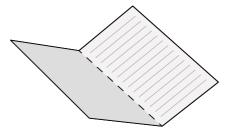
$$b = \frac{1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
a + 2b &= -4\frac{1}{2} \\
a + 2\frac{1}{2} &= -4\frac{1}{2} \\
a + 1 &= -4\frac{1}{2} \\
a &= -4\frac{1}{2} - 1 \\
a &= -5\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_n &= a + (n-1)b \\
U_n &= -5\frac{1}{2} + (n-1)b \\
2U_n &= -5 + (n-1) \\
2U_n &= n - 6 \\
U_n &= \frac{n-6}{2}
\end{aligned}
$$

2. Barisan Geometri

Dalam mempelajari barisan geometri diawali dengan mengajak siswa melakukan eksplorasi 2.3.

Eksplorasi 2.1 Melipat Kertas

Gambar 2.1 Kertas Dilipat Satu Kali

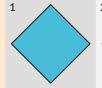
Pada bagian ini, siswa diminta melakukan eksplorasi yaitu melipat kertas dan menentukan banyak bagian sama besar yang terbentuk dari lipatan kertas tersebut seperti yang tampak pada Gambar 2.1 Selanjutnya siswa diminta untuk mengisi Tabel 2.2

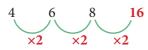
Tabel 2.2 Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk

Jumlah melipat kertas	1 kali	2 kali	3 kali	4 kali
Banyaknya bagian sama besar yang terbentuk	2 bagian	**4** bagian	**8** bagian	**16** bagian

Pada bagian ini, guru dapat meminta siswa menampilkan jawaban pada tabel dan menunjukkan hasil lipatan pada kertas.

Ayo Berpikir Kreatif

Temukan cara melipat kertas yang berbeda. Bagaimana dengan jumlah bagian sama besar yang terbentuk? Apakah sama dengan yang ada pada tabel? Jelaskan.

Selanjutnya, untuk menanamkan konsep mengenai barisan geometri dan rasio, siswa diminta menjawab pertanyaan terkait eksplorasi 2.

- Apakah banyaknya bagian yang sama besar pada lipatan kertas membentuk barisan bilangan? **Ya**
- Aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut? **Bilangan sesudah hasil dari bilangan sebelum dikali dengan 2**.
- Operasi hitung apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?

- Ayo amati rasio antara dua suku yang berdekatan.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{4} = 2$$

- Apakah rasio antara dua suku yang berdekatan selalu sama? **Ya**.

Guru memberikan penegasan bahwa **suatu barisan dengan rasio antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN GEOMETRI**. Rasio pada barisan geometri dilambangkan dengan r.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan memahami barisan geometri, guru diharapkan dapat menambahkan contoh lain yang merupakan barisan aritmetika dan barisan geometri serta meminta siswa mengidentifikasi barisan tersebut bersama dengan teman kelompoknya.

Eksplorasi 2.4 Pembelahan Bakteri

Pada bagian ini, siswa diminta untuk menentukan jumlah bakteri setelah membelah selama 20 jam. Beri kesempatan kepada siswa untuk menjawab dengan cara mereka sendiri. Setelah itu, siswa diajak menjawab pertanyaan berikut untuk membangun pemahaman mengenai rumus menentukan suku $ke\text{-}n$ barisan geometri.

- Suku pertama pada permasalahan di atas adalah 2
- Tiap dua jam, membelah menjadi 3, maka rasio pada barisan di atas adalah 3

Dalam 20 jam, terjadi pembelahan sebanyak 20 jam : 2 jam = 10 kali → $n = 10$.

$U_{10} = \ldots$

$U_1 = 2$

$U_2 = 2 \times 3$ (2 dikali 3 sebanyak 1 kali) $= 2 \times 3^1$

$U_3 = 2 \times 3 \times 3$ (2 dikali 3 sebanyak 2 kali) $= 2 \times 3^2$

$U_4 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ (2 dikali 3 sebanyak 3 kali) $= 2 \times 3^3$

$U_5 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (2 dikali 3 sebanyak 4 kali) $= 2 \times 3^4$

.

.

.

U_{10} = 2 dikali 3 sebanyak 9 kali

$U_{10} = 2 \times 3^9$

Setelah mendapatkan jumlah bakteri setelah pembelahan selama 20 jam, maka siswa diajak menyimpulkan rumus menentukan suku ke-n pada barisan geometri adalah $U_n = a \,.\, r^{n-1}$

Setelah uraian konsep mengenai menentukan jumlah suku *ke-n* barisan geometri, siswa diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep barisan geometri, siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal latihan 2.

Kunci Jawaban Latihan 2.2

1. a. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots, \ldots$

   Soal di atas adalah barisan geometri, karena memiliki rasio = 2.

   Dua suku berikutnya: 1, 2

   b. 25, 5, 1, …, …

   Soal di atas adalah barisan geometri dengan rasio = $\frac{1}{5}$

   Dua suku berikutnya: $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}$

2. $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_{10} = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{9-1}$$

$$U_{10} = 2^6\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$$

$$U_{10} = 2^6\left(\frac{1}{2^8}\right)$$

$$U_{10} = 2^6\left(\frac{1}{2^6.2^2}\right)$$

$$U_{10} = \frac{1}{2^2}$$

$$U_{10} = \frac{1}{4}$$

3. $U_2 = 80$

   $ar = 80$ ... (persamaan 1)

   $U_6 = 5$

   $ar^5 = 5$ ... (persamaan 2)

Substitusi pers. 1 ke pers. 2

$$
\begin{aligned}
ar^5 &= 5 \\
ar \cdot r^4 &= 5 \\
80 \cdot r^4 &= 5 \\
r^4 &= \frac{5}{80} \\
r^4 &= \frac{1}{16} \\
r &= \frac{1}{2} \\
ar &= 80 \\
a \cdot \frac{1}{2} &= 80 \\
a &= 160
\end{aligned}
$$

$$U_3 = ar^2 = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 40$$

Jadi, tiga suku pertama adalah 160, 80, dan 40.

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

Alternatif jawaban pertanyaan pada refleksi:

- Pada barisan aritmetika terdapat beda, sedangkan barisan geometri terdapat rasio.
- Dengan cara menentukan beda atau rasio pada barisan yang dketahui.

Alternatif jawaban

Contoh barisan aritmetika dalam kehidupan sehari-hari:

Seorang siswa menabung di koperasi sekolah. Bulan pertama menabung Rp5.000,00, bulan kedua Rp7.000,00, bulan ketiga Rp8.000,00, bulan keempat Rp9.000,00, dan seterusnya. Maka untuk menghitung jumlah uang yang ditabung pada bulan ke-10 dapat ditentukan dengan menggunakan konsep barisan aritmetika.

B. Deret Bilangan

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan kepada siswa kapan konsep DERET BILANGAN muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan dua pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap dua pertanyaan ini selama pembelajaran subbab mengenai DERET.

Gunakan bagian **Ayo Mengingat Kembali** mengenai barisan bilangan yang sudah dipelajari pada subbab sebelumnya. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

- Apa itu barisan bilangan?
- $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$ apakah termasuk barisan bilangan? Jika ya, apakah bilangan tersebut membentuk barisan aritmetika atau barisan geometri?
- Sebutkan contoh barisan aritmetika dan barisan geometri!

Eksplorasi 2.5 Jabat Tangan

Sebelum mulai kegiatan eksplorasi, bentuk siswa dalam kelompok yang terdiri dari 5-6 siswa. Siswa diminta untuk bereksplorasi dengan melakukan jabat tangan bersama teman satu kelompok. Selanjutnya siswa diarahkan untuk menjawab pertanyaan mengenai banyak jawab tangan yang terjadi.

- Jika ada 2 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? **1**
- Jika ada 3 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? **3**
- Jika ada 4 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? **6**
- Berapa total siswa dalam kelompok, dan berapa banyak jabat tangan yang terjadi? **5 siswa. Banyak jabat tangan yang terjadi adalah 10**.

  Bagaimana kalian mengetahuinya? **Kami mencoba jabat tangan di semua anggota kelompok dan menghitung banyak jabat tangan sebanyak 10 kali**.

Apakah banyak jabat tangan di atas membentuk barisan? Jelaskan jawabanmu.

Alternatif jawaban:

Banyak jabat tangan tidak membentuk barisan aritmetika maupun geometri, karena barisan tersebut tidak mengandung beda atau rasio yang tetap.

Dari Eksplorasi 2.5, banyak jabat tangan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 2.3 Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas

Banyaknya orang yang hadir	Banyak jabat tangan	Uraian dari banyak jabat tangan
Dua orang	1	1
Tiga orang	3	1 + 2
Empat orang	**6**	1 + **2** + **3**
Lima orang	**10**	1 + **2** + **3** + **10**

- Apakah uraian dari jumlah jabat tangan merupakan bentuk penjumlahan dari barisan bilangan? **Ya**

Guru memberikan penegasan bahwa bentuk penjumlahan dari barisan bilangan akan membentuk deret bilangan.

1. Deret Aritmetika

Guru menyampaikan cerita tentang Carl Friedrich Gauss yang memecahkan soal terkait penjumlahan bilangan 1 – 100.

Setelah itu, siswa diajak mencermati kembali deret bilangan tersebut.

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \ldots \ldots \ldots + 98 + 99 + 100 = \cdots$

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan? **Ya**
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas? **Barisan aritmetika.**

Guru memberikan penegasan bahwa **suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika adalah deret aritmetika**.

Selanjutnya, guru menggiring siswa untuk memahami bagaimana menemukan kembali rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika.

2. Deret Geometri

Eksplorasi 2.6 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19

Guru mengarahkan siswa untuk memahami rumus jumlah n suku pertama deret geometri melalui eksplorasi 2.6. Diawali dengan menjawab pertanyaan terkait dengan data pada Tabel 2.4.

- Apakah jumlah pasien membentuk barisan bilangan? **Ya**.
- Berapa beda atau rasio dari barisan di atas? **Rasio = 3**
- Terdiri dari berapa suku barisan tersebut? **Terdiri dari 5 suku**.

Tabel 2.4 Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri

	1	2	3
S_2 : jumlah pasien dua bulan pertama	$S_2 = 4 + 12 = 16$	$S_2 = \frac{36-4}{3-1} = \frac{32}{2} = 16$	$S_2 = \frac{U_3 - U_1}{r-1}$
S_3 : jumlah pasien tiga bulan pertama	$S_3 = 4 + 12 + 36 = 52$	$S_3 = \frac{108-4}{3-1} = \frac{104}{2} = 52$	$S_3 = \frac{U_4 - U_1}{r-1}$
S_4 : jumlah pasien empat bulan pertama	$S_4 = 4 + 12 + 36 + 108 = 160$	$S_4 = \frac{324-4}{3-1} = \frac{320}{2} = 160$	$S_4 = \frac{U_5 - U_1}{r-1}$

Dari tabel 2.5 Guru membimbing siswa dalam menemukan kembali rumus jumlah n suku pertama deret geometri.

Setelah penjabaran konsep mengenai menentukan jumlah n suku pertama deret aritmetika dan geometri, siswa diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep deret bilangan, siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal latihan 3.

Kunci Jawaban Latihan 2.3

1. Jumlah bilangan kelipatan 4 di antara 10 – 100:

   12 + 16 + … … … + 96

   a = 12 b = 4

$$\begin{aligned} U_n &= 96 \\ a+(n-1)\,b &= 96 \\ 12+(n-1)\,4 &= 96 \\ 12+4_n-4 &= 96 \\ 8+4_n &= 96 \\ 4_n &= 88 \\ n &= 22 \\ S_n &= \frac{n}{2}\,(a-U_n) \end{aligned}$$

$$S_22 = \frac{22}{2}\,(12+96) = 11\,(108) = 1.188$$

2. a = 9

$$\begin{aligned} r &= 3 \\ S_n &= 9.837 \\ 9.837 &= \frac{9\,(3^n-1)}{3-1} \\ 9.837 &= \frac{9\,(3^n-1)}{2} \\ 19.674 &= 9\,(3^n-1) \\ 2.186 &= (3^n-1) \\ 2.187 &= 3^n \\ n &= 13 \end{aligned}$$

3. $\frac{3}{2}+3+6+12+\ldots+Y=\frac{762}{4}$

   $a=\frac{3}{2}$ $r=\frac{6}{3}=2$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a\,(r^n-1)}{r-1} \\ \frac{764}{4} &= \frac{\frac{3}{2}\,(r^n-1)}{2-1} \\ \frac{764}{4} &= \frac{3}{2}\,(r^n-1) \\ 1.524 &= 12(2^n-1) \\ 127 &= 2^n-1 \\ 128 &= 2^n \\ n &= 7 \end{aligned}$$

$$Y = U_7 = ar^6 = \frac{3}{2}.2^6 = 3.2^5 = 96$$

3. Deret Geometri Tak Hingga

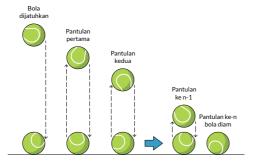
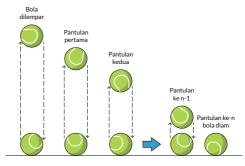
Eksplorasi 2.7 Panjang Lintasan Bola

Siswa diminta untuk menyimak permasalahan yang ada pada eksplorasi 2.7. Lalu, siswa diajak untuk mencobakan langsung melempar bola seperti yang ada pada Gambar 2.9 yaitu siswa melemparkan bola dari ketinggian tertentu, misal dari atas meja. Setelah itu, siswa diminta melemparkan bola dengan cara yang berbeda yaitu dari bawah ke atas.

Selanjutnya siswa diarahkan untuk menjawab pertanyaan terkait eksplorasi 2.7.

- Menurutmu, apakah tinggi pantulan bola pada permasalahan di atas membentuk deret geometri? Ya. Bagaimana kalian mengetahuinya? Karena disebutkan pada permasalahan bahwa setiap kali bola memantul, tingginya menjadi $\frac{1}{4}$ kali dari tinggi pantulan sebelumnya. Maka $\frac{1}{4}$ adalah rasio pada deret geometri.
- Setelah melakukan percobaan, apakah kalian mengetahui dengan pasti berapa kali bola memantul sampai akhirnya berhenti? Tidak. Karena banyak pantulan bola tidak terhitung.

Apakah panjang lintasan bola akan sama jika bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu atau dilempar dari bawah? Jelaskan jawabanmu

Alternatif jawaban: Panjang lintasannya akan berbeda. Jika bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu, panjang lintasannya akan lebih panjang dari lintasan bola yang dilempar dari bawah, seperti pada gambar di bawah ini.

Lintasan Bola Dijatuhkan dari Ketinggian Tertentu

Lintasan Bola Dilempar dari Bawah

Lalu siswa digiring untuk memahami rumus dari jumlah deret geometri tak hingga. Dan tak lupa menjelaskan perbedaan dari deret geometri tak hingga konvergen dan divergen.

Ayo Berpikir Kritis

Mengapa jumlah suku deret geometri tak hingga divergen hasilnya ±∞? Jelaskan jawabanmu

Alternatif jawaban: Deret geometri tak hingga yang divergen berarti deret geometri tak hingga yang tidak terbatas jumlahnya. Jadi, jika $r < -1$ maka jumlah deret geometri tak hingga tersebut -∞ dan jika $r > 1$ maka jumlah deret geometri tersebut adalah +∞.

Diferensiasi

Bagi siswa yang telah memahami deret geometri tak hingga, diharapkan dapat mempresentasikan penyelesaian dari permasalahan pada eksplorasi 2.7. Lalu bagi siswa yang mengalami kesulitan dalam memahami deret geometri tak hingga, guru diharapkan dapat memberikan contoh lain dari deret geometri tak hingga yang konvergen dan divergen.

Setelah penjelasan konsep mengenai menentukan jumlah deret geometri tak hingga, siswa diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep deret geometri tak hingga, siswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal latihan 4.

Kunci Jawaban Latihan 2.4

1. $S_\infty = 10$

$$\begin{aligned} a &= x \\ S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ 10 &= \frac{x}{1-r} \\ 10 - 10r &= x \\ -10r &= x - 10 \\ r &= \frac{x-10}{-10} \\ r &= \frac{10-x}{10} \end{aligned}$$

Karena deret tak hingga merupakan deret konvergen, maka rasio berada di rentang $-1 < r < 1$

$$-1 < \frac{10 - x}{10} < 1$$
$$-10 < 10 - x < 10$$
$$-20 < -x < 0$$
$$0 < x < 20$$

2. $1 + (m - 1) + (m - 1)^2 + (m - 1)^3 + \ldots$

   $a = 1 \quad r = \frac{(m-1)^2}{m-1} = m - 1$

   Karena deret konvergen, maka $-1 < r < 1$
   $$-1 < m - 1 < 1$$
   $$-2 < m < 0$$

3. $4 + 12 + 36 + 108 + \ldots$

   $r = 124 = 3$

   Karena $r > 1$, maka deret tak hingga di atas merupakan deret divergen.

   Jadi, $S_\infty = +\infty$

Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

Alternatif jawaban pertanyaan pada refleksi:

- Perbedaan deret aritmetika dan deret geometri yaitu pada beda dan rasio dari deret tersebut. Lalu, deret merupakan penjumlahan dari suatu barisan, maka suku-suku pada deret bilangan dipisahkan tanda (+) atau operasi penjumlahan, sedangkan barisan tidak.
- Deret tak hingga konvergen merupakan deret tak hingga yang jumlahnya masih terbatas, sedangkan deret divergen adalah deret tak hingga yang jumlahnya tak terbatas sehingga dinyatakan dengan $\pm\infty$.

Kunci Jawaban Latihan 2.5

Soal Pemahaman

1. Alternatif penyelesaian.

   $U_3 = 28.500$

   $a + 2b = 28.500$ ….. (persamaan 1)

   $U_7 = 22.500$

   $a + 6b = 22.500$ ….. (persamaan 2)

   Eliminasi Persamaan 1 dan 2

   $$\begin{array}{r} a + 2b = 28.500 \\ a + 6b = 22.500 - \\ \hline -4b = 6.000 \\ b = -1.500 \end{array}$$

   $a + 2b = 28.500$

   $a + 2(-1.500) = 28.500$

   $a - 3.000 = 28.500$

   $a = 31.500$

   $U_n = 0$

   $a + (n - 1)b = 0$

   $31.500 + (n - 1)(-1.500) = 0$

   $31.500 - 1.500n + 1.500 = 0$

   $33.000 = 1.500n$

   $n = \frac{33.000}{1.500}$

   $n = 22$

2. Alternatif penyelesaian.

   $U_3 = 20$

   $ar^2 = 20$ …. Persamaan 1

   $U_5 = 80$

   $ar^4 = 80$ …. Persamaan 2

Substitusi pers. 1 ke pers. 2

$ar^4 = 80$

$ar^2 r^2 = 80$

$20r^2 = 80$

$r^2 = 4, \qquad r = 2$

$ar^2 = 20$

$a.2^2 = 20$

$a = 5$

$U_{10} = ar^9 = 5.2^9 = 2.560$

3. Alternatif penyelesaian.

a. $1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \cdots \ \ldots \ \ldots + \frac{23}{3}$

$$a = 1 \qquad b = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

$$U_n = \frac{23}{3}$$

$$a + (n-1)\,b = \frac{23}{3}$$

$$1 + (n-1)\,\frac{2}{3} = \frac{23}{3}$$

$$1 + \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{23}{3}$$

$$\frac{2}{3}n = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}$$

$$n = \frac{\frac{22}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{22}{3} \cdot \frac{3}{2} = 11$$

$$S_{11} = \frac{11}{2}\,(a + U_{11}) = \frac{11}{2}\left(1 + \frac{23}{3}\right) = \frac{11}{2} \cdot \frac{26}{3}$$

$$= \frac{143}{3}$$

b. $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \cdots \ \ldots \ \ldots + 243$

$$a = \frac{1}{27} \qquad r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = 3$$

$$U_n = 243$$

$$a \cdot r^n = 243$$

$$\frac{1}{27} \cdot 3^n = 243$$

$$3^n = 243 : \frac{1}{27} = 243 \cdot 27 = 3^5 \cdot 3^3 = 3^8$$

$$n = 8$$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{\frac{1}{27}(6.560)}{2}$$
$$= \frac{3.280}{27}$$

Soal Aplikasi

4. $$U_3 = ar^2 = 90$$
$$10r^2 = 90$$
$$r^2 = \frac{90}{10}$$
$$r^2 = 9$$
$$r = 3$$
Pertambahan penduduk pada tahun 2025 adalah
$$U_5 = ar^4$$
$$= 10 \times 3^4$$
$$= 10 \times 81$$
$$= 810$$
Jadi, jumlah pertambahan penduduk pada tahun 2025 adalah 810 orang.

5. $U_{60} = U_n$
$$S_n = \frac{n}{2}\left(a + U_n\right)$$
$$30.000 = 30\left(50 + U_n\right)$$
$$30\left(50 + U_n\right) = 30.000$$
$$50 + U_n = 1.000$$
$$U_n = 950$$
Jadi, Pak Artus mengumpulkan sebanyak 950 butir telur pada hari terakhir.

6. Alternatif penyelesaian.
Minggu Pertama = $U_1 = a = 24$
Minggu Kedua = $2 \times U_1 = 2 \times 24 = 48$
Minggu Ketiga = $U_3 = 96 = 2 \times 48$
$$U_n = 2^{n-1} \times U_1$$
$$U_8 = 2^{8-1} \times 24 = 2^7 \times 24 = 128 \times 24$$
$$= 3.072$$
$$S - n = \frac{n}{2}\left(a + U_n\right)$$
$$S_8 = \frac{8}{2}\left(24 + 3.072\right)$$
$$S_8 = 4(3.096)$$
$$S_n = 12.384$$
Jadi, total jumlah pasien pada bulan kedua adalah 12.384 orang.

7. Panjang lintasan ketika bola jatuh:

$$a = 8, \qquad r = \frac{3}{5}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{3}{5}} = \frac{8}{\frac{2}{5}} = 8.\frac{5}{2} = 20m$$

Panjang lintasan ketika bola memantul ke atas:

$$a = 8.\frac{3}{5} = \frac{24}{5}, \qquad r = \frac{3}{5}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{24}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{24}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{24}{5}.\frac{5}{2}$$

$$= 12m$$

Total panjang lintasan bola

$20m + 12m = 32m$

Soal Penalaran

8. Luas lingkaran terbesar: 1386 cm^2

Luas Lingkaran II (kecil): 154 cm^2

Barisan Aritmetika:

K_1, K_1, K_3, K_4, K_5

$K_3 = U_3 = \cdots$

Luas lingkaran terbesar = 1386 cm^2

$$\pi r^2 = 1386cm^2$$

$$\frac{22}{7}r^2 + = 1386cm^2$$

$$r^2 = 1386cm^2.\frac{7}{22}$$

$$r^2 = 441cm^2$$

$$r = 21$$

Maka keliling Lingkaran pertama:

$$(U_1) = a = 2.\pi.r = 2.\frac{22}{7}.21 = 132cm$$

Luas Lingkaran kecil = 154 cm^2

$$\pi r^2 = 154cm^2$$

$$\frac{22}{7}r^2 = 154cm^2$$

$$r^2 = 154cm^2.\frac{7}{22}$$

$$r^2 = 49cm^2$$

$$r = 7cm$$

Maka keliling lingkaran terkecil

$U_5 = 2.\pi.r = 2.\frac{22}{7}.7 = 44cm$

Keliling lingkaran membentuk barisan Aritmetika.

$U_5 = a + 4b$

$44 = 132 + 4b$

$4b + 132 = 44$

$4b = 44 - 132$

$4b = -88$

$b = -22$

Sehingga keliling lingkaran ketiga:

$U_3 = a + 2b = 132 + 2(-22) = 88$

Jadi keliling lingkaran ketiga adalah 88cm

9. $U_1 = 3$

   $U_7 = 192$

   Ditanya:

   U_2, U_3, U_4, U_5, U_6!

   Penyelesaian

   $U_1 = a = 3$

   $U_7 = 192$

   $ar^6 = 192$

   $3r^6 = 192$

   $r^6 = 64$

   $r = 2$

   $U_2 = ar = 3\times 2 = 6$

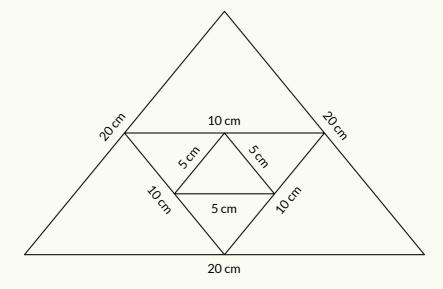
   $U_3 = ar^2 = 3(2^2) = 3(4) = 12$

   $U_4 = ar^3 = 3(2^3) = 3(8) = 24$

   $U_5 = ar^4 = 3(2^4) = 3(16) = 48$

   $U_6 = ar^5 = 3(2^5) = 3(32) = 96$

   Jadi, 5 bilangan yang disisipkan di antara 3 dan 192 agar susunan bilangan tersebut membentuk barisan geometri berturut-turut adalah 6, 12, 24, 48, dan 96.

10.

Keliling semua segitiga pertama $(K_1) = 3_s = 3 \times 20 = 60$ cm

$$K_2 = 3s = 3\left(\frac{1}{2} \times 20\right) = 3\left(\frac{1}{2} \times 20\right) = 30cm$$

$$K_3 = 3s = 3\left(\frac{1}{2} \times 10\right) = 3\left(\frac{1}{2^2} \times 20\right) = 15cm$$

$$K_n = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^{n-1}} \times s\right)$$

$$K_4 = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^{4-1}} \times 20\right) = 3 \times \left(\frac{1}{2^3} \times 20\right) = 3 \times \left(\frac{1}{8} \times 20\right) = 3 \times 2,5 = 7,5$$

$$K_5 = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^4} \times 20\right) = 3 \times \left(\frac{1}{16} \times 20\right) = \times 1,25 = 3,75$$

$$K_6 = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^5} \times 20\right) = 3 \times \left(\frac{1}{32} \times 20\right) = \times 0,625 = 1,875$$

Total:

$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 = 60 + 30 + 15 + 7,5 + 3,75 + 1,875 = 118,125$ cm

Jadi, total keliling semua segitiga adalah 118,125 cm.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. a. $4 + 2 + 1 + \ldots$

   $U_1 = a = 4$

   U_{10} dan $S_{10} = \cdots$

Alternatif penyelesaian:

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$U_n = ar^{n-1}$$
$$U_{10} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 4\left(\frac{1}{512}\right) = \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7}$$
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
$$S_{10} = \frac{4(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4\left(1-\frac{1}{512}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{4\left(\frac{511}{512}\right)}{\frac{1}{2}} = 8\left(\frac{511}{512}\right) = \frac{511}{2^6}$$

Jadi, suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret tersebut berturut-turut adalah $\frac{1}{2^7}$ dan $\frac{511}{2^6}$

a. 4 + 1 + (-2) + …

$U_1 = a = 4$

U_{10} dan $S_{10} = \cdots$

$$b = U_2 - U_1 = 1 - 4 = -3$$
$$U_{10} = a + 9b = 4 + 9(-3) = 4 - 27 = -23$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(a + U_{10}) = 5(4 + (-23)) = 5(-19) = -95$$

Jadi, suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret tersebut berturut-turut adalah -23 dan -95

2. $U_2 + U_5 + U_{20} = 54$

$U_9 = \cdots$

Alternatif penyelesaian:

$U_2 + U_5 + U_{20} = 54$

$(a+b)+(a+4b)+(a+19b) = 54$

$3a + 24b = 54$

$3(a+8b) = 54$

$a + 8b = 18$

$U_9 = a+8b = 18$

Jadi, suku ke-9 barisan aritmetika tersebut adalah 18.

3. $U_1 = 4$

   $U_5 = 324$

   $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = S_5 = \cdots$

   Alternatif penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
U_5 &= ar^4 \\
324 &= 4r^4 \\
4r^4 &= 324 \\
r^4 &= 81 \\
r &= 3 \\
S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\
S_5 &= \frac{4(3^5 - 1)}{3 - 1} \\
S_5 &= \frac{4(243 - 1)}{2} \\
S_5 &= 2(242) \\
S_5 &= 484
\end{aligned}
$$

   Jadi, panjang kayu semula adalah 484 cm.

4. $\frac{x+y}{xy} = 1$

   $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xy^2} + \ldots$

   Alternatif penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+y}{xy} &= 1 \\
xy &= x + y
\end{aligned}
$$

   Dari deret geometri tak hingga di atas, dapat diketahui bahwa:

$$a = \frac{1}{x} \quad r = \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{y}} \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{y}} \times \frac{xy}{xy} \\ &= \frac{y}{xy-x} \\ &= \frac{y}{(x+y)-x} \\ &= \frac{y}{y} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pengayaan

Pada bagian pengayaan, siswa diharapkan dapat melihat pengaruh terhadap suatu barisan geometri jika nilai rasio, suku pertama, dan jumlah banyak suku diubah-ubah. Sebelum menentukan barisan geometri sendiri, siswa dibentuk kelompok yang terdiri dari 4 orang siswa. Selanjutnya, siswa diberi kesempatan untuk membuat barisan geometri dengan aturan yang berbeda di tiap kelompok.

Contoh:
Kelompok 1:
tiap siswa anggota kelompok memilih suku pertama yang berbeda-beda, dengan rasio dan banyak suku sama.

Kelompok 2:
tiap siswa anggota kelompok memilih rasio yang berbeda-beda, dengan suku pertama dan banyak suku sama.

Kelompok 3:
tiap siswa anggota kelompok memilih banyak yang berbeda-beda, dengan suku pertama dan rasio sama.

Lalu, siswa diminta untuk membuka link aplikasi *GeoGebra* melalui komputer/ laptop/ handphone untuk melihat tampilan grafik dari barisan yang mereka buat.

Alternatif jawaban.

a. Barisan geometri 1.

Suku pertama	2
Rasio	2
Banyak suku	6
2, 4, 8, 16, 32, 64	

b. Dari barisan yang telah kalian buat, ubahlah rasionya menjadi bilangan yang lebih besar, sajikan barisan geometri yang baru pada tabel di bawah ini.
Barisan geometri 2.

Suku pertama	2
Rasio	3
Banyak suku	6
2 , 6 , 18 , 54 , 162 , 486	

Apa yang terjadi pada suku-suku pada barisan tersebut setelah diubah nilai rasionya? Jelaskan.

Alternatif jawaban:

Jika rasionya diubah dengan bilangan yang nilainya lebih dari sebelumnya, maka suku-suku pada barisan tersebut akan semakin besar. Sebailknya, jika rasio diubah dengan bilangan yang nilainya kurang dari sebelumnya, maka suku-suku pada barisan tersebut akan semakin kecil.

c. Prediksilah, bagaimana suku-suku pada barisan tersebut jika rasionya diganti dengan $\frac{1}{2}$ dari rasio pada barisan geometri pertama.

Alternatif jawaban:

Karena $r = \frac{1}{2}$ berarti rasio kurang dari rasio sebelum, maka suku-suku pada barisan tersebut akan semakin kecil.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab 3

Panduan Khusus

Vektor dan Operasinya

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan dapat:

1. menyatakan vektor dalam berbagai representasi;
2. menunjukkan beberapa jenis vektor;
3. menyatakan vektor dalam komponen-komponen sistem koordinat;
4. melakukan operasi vektor serta menginterpretasi hasilnya secara geometris dan fisik; serta
5. menggunakan operasi vektor untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.

Bab Vektor dan Operasinya bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai vektor dan operasinya. Selain itu, siswa dapat menggambar vektor dan operasinya baik secara manual maupun dengan menggunakan teknologi. Siswa akan merepresentasikan vektor secara grafis dan memberikan notasinya. Siswa akan memahami vektor negatif atau vektor lawan dengan baik jika sudah memahami konsep vektor dengan benar. Mereka akan melihat bagaimana sistem koordinat Kartesius memudahkan dalam menentukan besar dan arah vektor, yang selanjutnya sangat berguna dalam melakukan operasi vektor. Tiga operasi vektor yang dibahas dalam bab ini adalah penjumlahan vektor, pengurangan vektor, dan perkalian skalar dengan vektor. Selain melibatkan komponen-komponen vektor, penjumlahan dan pengurangan vektor dapat juga dilakukan dengan metode segitiga, metode jajar genjang dan metode poligon.

Pada subbab A, siswa melakukan eksplorasi untuk memahami konsep vektor. Pada subbab B, siswa melakukan eksplorasi untuk menunjukkan vektor dalam sistem koordinat Kartesius. Pada subbab C siswa melakukan operasi vektor dengan beberapa cara.

Pemahaman vektor dan operasinya dalam bab ini berkaitan dengan bab Trigonometri di mana komponen-komponen vektor dapat berkaitan dengan sinus dan cosinus. Vektor dan operasinya terutama digunakan dalam bidang mekanika (mata pelajaran fisika) untuk menentukan resultan gerak dan gaya suatu benda. Contohnya, pengaruh gerak angin pada gerak pesawat dan besar gaya total yang bekerja pada sebuah pesawat.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
A. Notasi dan Jenis Vektor	4	• Menyatakan vektor dalam berbagai representasi • Menunjukkan jenis-jenis vektor	• Notasi • Jenis vektor	• Vektor lawan • Vektor ekuivalen • Vektor berkebalikan	Pembelajaran penemuan	Buku Siswa	
B. Vektor dan Sistem Koordinat	4	Menyatakan vektor dalam komponen-komponen sistem koordinat	Komponen-komponen vektor	• Vektor satuan • Vektor posisi	Pembelajaran Penemuan	Buku Siswa	
C. Operasi Vektor	8	• Melakukan operasi vektor serta menginterpretasi hasilnya secara geometris dan fisik • Menggunakan operasi vektor untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari	• Penjumlahan vektor • Pengurangan • vektor Perkalian skalar dengan vektor	Resultan	Pembelajaran Penemuan	Buku Siswa	

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Notasi, dan Jenis Vektor

- Menyatakan vektor dalam berbagai representasi
- Menunjukkan jenis-jenis vektor

- Busur
- Penggaris

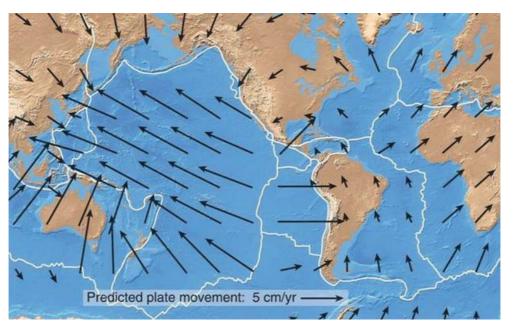
Perkenalkan bab ini dengan PEMBUKA BAB dan tanyakan kepada siswa apakah mereka sering memperhatikan petunjuk arah dan jarak untuk mencapai suatu lokasi. Setelah itu, sampaikan tiga pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap ketiga pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai vektor dan operasinya.

Gunakan bagian MENGINGAT KEMBALI mengenai sistem koordinat Kartesius yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan ini dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

- Apa peran titik O dalam sistem koordinat Kartesius?
- Bagaimana menyatakan arah dalam sistem koordinat Kartesius?
- Bagaimana menyatakan koordinat suatu titik dalam sistem koordinat Kartesius?

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta siswa menceritakan pengalaman dalam menggunakan papan petunjuk suatu lokasi. Buat diskusi singkat tentang pentingnya petunjuk arah dan jarak untuk mencapai suatu lokasi dan meminta siswa

memikirkan petunjuk arah dan jarak di udara dan laut. Pancing siswa untuk berpikir dengan menanyakan, besaran apa lagi yang mempunyai arah, contohnya kecepatan dan gaya. Kemudian minta siswa melakukan Eksplorasi dalam PERMASALAHAN PEMBUKA dengan menggunakan busur dan penggaris untuk menentukan gerak lempeng bumi yang melalui Indonesia. Siswa dapat melakukan eksplorasi secara individu terlebih dahulu kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok. Pastikan siswa untuk mengamati gambar dengan teliti dan memahami arti anak panah dalam peta.

Dari eksplorasi siswa dapat membedakan anak panah terpanjang, anak panah terpendek, dan anak panah yang sama atau ekuivalen.

Gambar 3.1 Prediksi Kecepatan Lempeng Bumi
Sumber: https://spotlight.unavco.org/how-gps-works/gps-and-tectonics/gps-and-tectonics.html,

Siswa perlu menentukan tiga anak panah berbeda yang melalui Indonesia. Ketiganya menunjukkan gerak lempeng yang berbeda.

Pastikan kerjaan siswa ketika mereka mengonversi panjang untuk mendapatkan besar kecepatan gerak lempeng. Perhatikan patokan anak panah dalam peta yang panjangnya menunjukkan 5 cm per tahun

Tabel 3.1 Besar dan Arah Kecepatan Lempeng Bumi

Anak Panah	Arah (°)	Panjang (cm)	Perbandingan Panjang	Kecepatan gerak (cm/tahun)
Pertama	60		1,6	8
Kedua	315		1	1,6
Ketiga	55		1,6	8

Pastikan siswa dapat mengukur sudut dengan benar termasuk sudut-sudut yang lebih besar dari 90°.

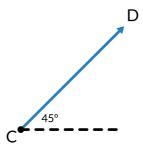
Manfaat menggambar gerak lempeng dengan anak panah pada peta adalah memudahkan untuk membaca datanya, berapa cepat dan ke mana arah gerak. Karenanya, para ilmuwan dapat memperkirakan pertemuan lempeng-lempeng yang akan terjadi lebih dahulu.

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka memahami apa yang dimaksud dengan vektor dan kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari.

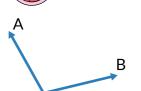
Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan PENJELASAN KONSEP dan tampilkan contoh-contoh notasi vektor. Khususnya, arahkan perhatian siswa pada pengertian vektor sebagai ruas garis berarah. Minta siswa menghubungkan pengertian vektor sebagai ruas garis berarah dengan eksplorasi yang mereka lakukan. Diskusikan lagi jika masih ada yang masih belum jelas atau membingungkan siswa. Uji pemahaman mereka dengan menjawab soal Ayo Berpikir Kritis.

Bentuk-bentuk ini bukan merupakan vektor.

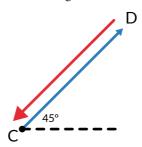
1. Bentuk pertama karena garisnya lengkung
2. Bentuk kedua karena garisnya mempunyai dua arah
3. Bentuk ketiga karena garisnya terdiri atas lebih dari satu garis lurus

Jelaskan kembali menyatakan besar dan arah vektor dengan merujuk pada Gambar 3.7.

Diskusikan contoh-contoh vektor dengan besar dan arah dalam kehidupan sehari-hari, misalnya mobil bergerak ke selatan dengan kelajuan 60 km/jam, gaya gravitasi 10 N dan arahnya ke bawah.

Vektor lawan dapat dijelaskan dengan membuat peragaan, misalnya berjalan dari titik asal ke suatu titik kemudian kembali ke titik asal. Perjalanan memerlukan dua vektor untuk menggambarkannya. Kedua vektor tersebut sama besar tetapi berlawanan arah, lihat Gambar 3.8.

Uji pemahaman mereka dengan menjawab soal Ayo Berpikir Kritis.

Ayo Berpikir Kritis

Vektor A bukan merupakan vektor lawan dari B karena arahnya tidak berlawanan dengan vektor B.

Vektor lawan dari CD, digambarkan sebagai berikut

Sudut antara vektor CD dan DC adalah 180° tetapi sudut dari DC adalah 225°.

Jelaskan kembali pengertian vektor ekuivalen dengan memberikan contoh dalam kehidupan sehari-hari. Misalkan kecepatan jatuhnya hujan sama pada lokasi yang berbeda.

Mintalah siswa mengerjakan Latihan untuk memeriksa pemahaman mereka. Mereka perlu terbiasa untuk menggambar arah vektor, khususnya sudut yang dibentuk vektor dengan arah horizontal. Mereka juga dapat menentukan besar sudut sesuai dengan arah mata angin.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan, khususnya dalam mengukur sudut, minta siswa memastikan garis horizontal harus berimpit dengan garis 0 pada busur.

Bagi siswa dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab baik sendiri maupun dari teman dengan kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

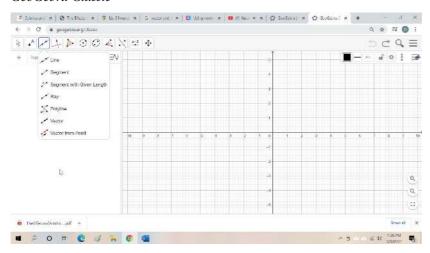
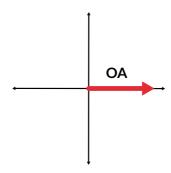
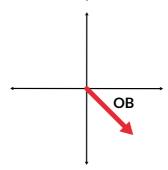
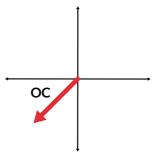
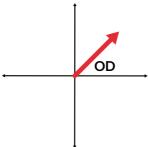
Kunci Jawaban Latihan 3.1

Ayo Menggunakan Teknologi

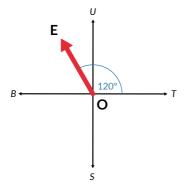
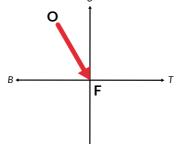
Siswa-siswa dapat menggunakan *Microsoft Word* atau *GeoGebra* untuk menggambar vektor.

Microsoft Word

Pilih *Insert* kemudian shapes dan klik gambar anak panah. Klik *Outline shape* untuk mengatur warna dan tebal garis.

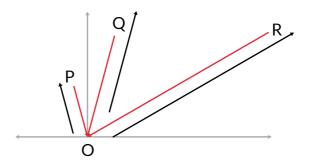
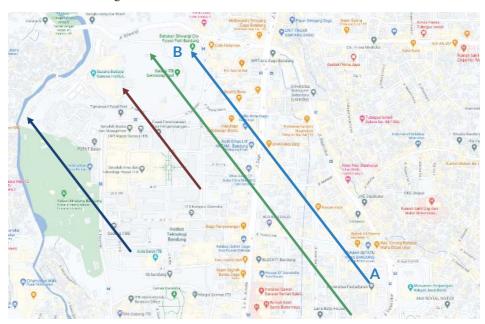
GeoGebra Classic

1. Vektor **OA**. Skala 1 cm mewakili 20 km/jam.

2. Vektor **OB**. Skala 1 cm mewakili 20 km/jam.

3. Vektor **OC**. Skala 1 cm mewakili 20 km/jam.

4. Vektor **OD** membentuk sudut 45° dengan sumbu x positif. Skala 1 cm mewakili 20 km/jam.

5. Skala 1 cm mewakili 200 km/jam. Vektor **OE** membentuk sudut 120° dan -60°

a.

b.

Kunci Jawaban Latihan 3.2

1. Nilai dan arah vektor

Vektor	Nilai Vektor	Arah Vektor
OP	200 N	120^{o}
OQ	400 N	70^{o}
OR	800 N	25^{o}

2. Vektor lawan atau vektor negatif dari **OP**, **OQ**, dan **OR**.

3. Peta Kota Bandung

a. Jarak langsung sekitar 1,05 km. Skala adalah 1 cm mewakili 0,35 km.
b. Vektor yang lebih besar nilainya daripada vektor **AB** adalah vektor berwarna hijau
c. Vektor yang lebih kecil nilainya daripada vektor **AB** adalah vektor berwarna coklat
d. Vektor yang ekuivalen dengan vektor **AB** adalah vektor berwarna biru tua

   Catatan:

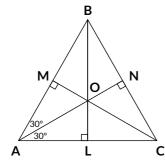
   Siswa perlu memahami bagaimana menggeser garis agar sejajar dengan garis lainnya sehingga dapat membuat vektor yang sejajar dengan vektor lainnya. Bisa gunakan aplikasi *Microsoft Word* untuk menggambar vektor-vektor tersebut jika siswa langsung mengambil dari *google map*.

4.

Ayo Berpikir Kritis

Vektor kecepatan pesawat kecil sama atau ekuivalen dengan pesawat besar karena jarak dan arah di antara keduanya harus tetap. Jika nilai vektor berbeda, maka posisi antara keduanya makin lama makin jauh. Jika arah berbeda maka proses pengisian tidak bisa terjadi.

5.

Ayo Berpikir Kreatif

Vektor-vektor yang ekuivalen adalah **AM** dan **MB**, **CN** dan **NB** serta **AL** dan **LC**.

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan bagian Berpikir Kritis dan Berpikir Kreatif tanpa bantuan, dan minta mereka untuk memikirkan pertanyaan-pertanyaan yang dapat dikembangkan dari soal-soal yang mereka kerjakan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Ayo Berefleksi

Sebagai penutup dari pembelajaran subbab ini, ajak siswa untuk merefleksikan apa yang sudah mereka pelajari melalui empat pertanyaan berikut.

1. Apakah kalian dapat memberikan contoh-contoh vektor dalam kehidupan sehari-hari?

   Sampel Jawaban: *Contoh-contoh vektor adalah posisi, perpindahan, kecepatan, dan gaya.*
2. Apakah kalian dapat menggambar vektor dan menyebutkan notasinya?

   Sampel Jawaban: *Menggambar anak panah. Notasi dapat satu huruf atau dua huruf, dapat huruf tebal atau ada anak panah.*
3. Dapatkah kalian menentukan vektor-vektor ekuivalen?

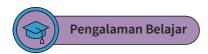
   Sampel Jawaban: *Vektor-vektor ekuivalen adalah vektor-vektor dengan panjang dan arah yang sama.*
4. Dapatkah kalian membuat vektor negatif atau vektor lawan dari suatu vektor?

   Sampel Jawaban: *Vektor lawan adalah vektor dengan panjang dan arah yang berlawanan dari suatu vektor.*

Aktivitas ini dapat dilakukan secara bersamaan dengan melakukan *Think-Pair-Share*, yaitu meminta masing-masing siswa memikirkan jawaban pertanyaan refleksi tersebut, kemudian berpasangan saling membagikan jawaban, memodifikasi jawaban sesuai hasil berbagi dengan pasangan, dan kemudian menyampaikan di kelas. Guru

dapat melakukan penilaian formatif berdasarkan jawaban dari siswa sehingga dapat menekankan kembali konsep utama sesuai dengan tujuan pembelajaran, atau memperbaiki miskonsepsi yang masih dimiliki oleh siswa.

Aktivitas ini juga dapat dilakukan secara mandiri oleh individu siswa dengan menuliskan dalam jurnal refleksi mereka jika waktu yang tersedia singkat dan tidak memungkinkan untuk mengadakan diskusi bersama. Guru kemudian dapat mengumpulkan hasil refleksi dan memberikan umpan balik terhadap pemahaman masing-masing siswa.

B. Vektor dan Sistem Koordinat

- Menyatakan vektor dalam berbagai representasi
- Menunjukkan jenis-jenis vektor
- Menyatakan vektor dalam komponen-komponennya berdasarkan sistem koordinat Kartesius

Penggaris, busur, dan kertas berpetak

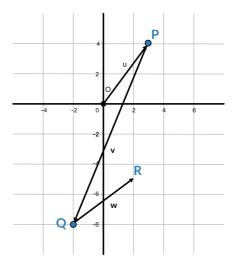
Mengingatkan siswa apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai notasi, vektor ekuivalen, dan vektor negatif. Uji pemahaman siswa bahwa vektor mempunyai titik pangkal dan titik ujung, hal ini menjadi dasar untuk memahami vektor dalam sistem koordinat Kartesius. Jika guru meminta siswa menuliskan refleksi di jurnal, maka guru dapat menekankan kembali hal-hal yang belum jelas dipahami oleh siswa sebagaimana tecermin dalam refleksi mereka.

Pemanasan

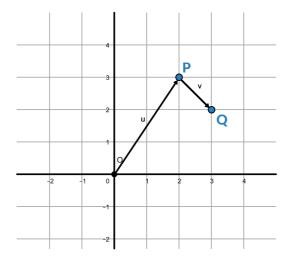
Diskusikan peran koordinat dalam menentukan arah perjalanan, misalnya berkendara di jalan tol dapat singgah di tempat *rest area* terlebih dahulu. Setiap benda bergerak pasti berubah posisi atau lokasinya. Pilot pesawat terbang mengubah ketinggiannya atau rutenya agar perjalanan aman dan menyenangkan. Perubahan-perubahan ini pastinya berkaitan dengan koordinat lokasi, perlu ditanyakan dan dilaporkan ke menara pengawas. Minta para siswa mencari tahu cara kerja GPS (*Global Positioning System*).

Ceritakan beberapa hal tentang Rene Descartes yang menemukan sistem koordinat Kartesius dan minta siswa mencermati apa yang perlu dilakukan dalam eksplorasi.

Ingatkan siswa untuk mencatat pertanyaan-pertanyaan yang mungkin timbul selama eksplorasi. Siswa bekerja secara berpasangan untuk melakukan eksplorasi. Setelah siswa melakukan eksplorasi, diskusikan hasil-hasil eksplorasi dengan meminta dua kelompok mempresentasikan hasilnya. Kumpulkan pertanyaan-pertanyaan siswa dan diskusikan dalam kelas, Tanyakan, bagaimana menyatakan notasi vektor dalam sistem koordinat dan bagaimana arah dinyatakan dalam sistem koordinat Kartesius.

Jawaban Eksplorasi 3.2 no. 1 adalah sebagai berikut.

Tunjukkan bahwa dua titik diperlukan untuk membuat satu vektor. Vektor **OP** dapat dinyatakan dalam (3   4). Ingatkan, bahwa tidak ada tanda koma dalam penulisan karena penulisan menunjukkan vektor baris. Jelaskan bahwa selain vektor

baris ada juga penulisan dalam vektor kolom. Kedua hal ini akan dibahas lebih detil. Bangkitkan rasa ingin tahu dengan bertanya, bagaimana penulisan vektor baris dari **PQ** dan **QR**.

Jawaban Eksplorasi 3.2 no. 2 adalah sebagai berikut.

Ayo Berpikir Kritis

1. Vektor berbeda dengan titik koordinat. Vektor memerlukan dua titik koordinat.
2. Pemilihan titik asal pada sistem koordinat tidak memengaruhi besar dan arah vektor karena vektor ditentukan oleh dua titik. Jika titik pangkal berubah, maka titik ujung juga berubah.

Pada penjelasan konsep dan contoh-contoh dijelaskan perbedaan sistem koordinat Kartesius berdimensi dua dengan berdimensi tiga dan konsep-konsep lainnya. Minta siswa memberikan contoh gerak benda yang memerlukan sistem koordinat Kartesius dua dimensi dan tiga dimensi. Contoh, gerak mobil di jalan raya untuk sistem koordinat Kartesius dua dimensi. Buat diskusi bagaimana teknologi digunakan dalam aplikasi untuk menentukan lokasi berdasarkan sistem koordinat Kartesius.

Gerak pesawat terbang dapat merujuk pada sistem koordinat Kartesius dua dimensi dan tiga dimensi. Ketika pesawat terbang berada di landasan pacu, yang digunakan adalah sistem koordinat Kartesius dua dimensi. Begitu pesawat mengudara, yang digunakan adalah sistem koordinat Kartesius tiga dimensi.

Ayo Berdiskusi

Aplikasi perjalanan dibuat dengan sistem koordinat Kartesius untuk menunjukkan rute yang dapat berubah setiap saat karena situasi lalu lintas yang selalu berubah.

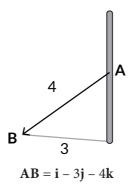
Fokuskan terlebih dahulu pada pemahaman vektor satuan dalam sistem koordinat dua dimensi dan tiga dimensi. Untuk sistem koordinat berdimensi tiga dapat menggunakan sistem tiga jari yang ada dalam Gambar 3.17. Setiap vektor dinyatakan dalam komponen-komponen menurut arahnya, dapat berupa vektor kolom atau vektor baris. Tanyakan apa arti penulisan **OP** (3 4). Berjalan 3 ke timur kemudian 4 ke utara. Jelaskan bahwa 3 dan 4 adalah komponen-komponen vektor. Minta siswa menyatakan komponen-komponen vektor **PQ** dan **QR** dan menjelaskan bagaimana cara mendapatkannya. Dari **P** ke **Q** berjalan 5 ke barat dan 12 ke selatan maka vektor **PQ** dituliskan (5 12) atau $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Dari **Q** ke **R** berjalan 4 ke timur dan 3 ke utara maka vektor **QR** dituliskan (3 4) atau $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Tunjukkan vektor-vektor yang ekuivalen dalam sistem koordinat, penulisan vektor baris dan kolom dari **u** dan **v** adalah (3 4) atau $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Panjang vektor ditentukan berdasarkan teorema Pythagoras dengan menarik akar dari penjumlahan kuadrat komponen.

Ingatkan bahwa setiap vektor sembarang dapat ditentukan vektor satuannya sehingga memudahkan untuk mengetahui arah vektor. Tanyakan, mengapa vektor satuan dari suatu perjalanan menjadi penting. Tunjukkan cara mendapatkan vektor posisi dan tanyakan mengapa peran vektor posisi penting. Jelaskan juga vektor berkebalikan dan manfaatnya.

Salah satu manfaat dari vektor satuan adalah mengetahui komponen-komponen dari vektor-vektor yang bukan vektor posisi atau vektor perpindahan seperti vektor gaya. Jelaskan contoh di bawah ini.

Yang diketahui adalah vektor posisi, tetapi dengan vektor satuan dapat diketahui komponen-komponen vektor gaya.

$\mathbf{AB} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

Vektor-vektor ekuivalen tidak bergantung pada letaknya karena vektor adalah besaran yang mempunyai nilai dan arah.

Berikan beberapa contoh soal yang lain untuk menunjang pemahaman vektor satuan dan vektor posisi, sekaligus vektor-vektor yang ekuivalen. Jelaskan, jika ada beberapa pesawat yang punya kecepatan sama di udara, maka jalur lintasan akan aman dari tabrakan.

Pastikan siswa sudah memahami vektor dalam sistem koordinat karena akan mendukung pemahaman operasi vektor.

Perluasan pembahasan

Jelaskan ada beberapa sistem koordinat sesuai dengan tujuannya. Contoh sistem koordinat bola dan sistem koordinat silinder. Kedua sistem koordinat ini digunakan untuk benda yang bergerak dalam lintasan berbentuk lengkung. Vektor satuan dalam kedua sistem koordinat ini tidak tetap, berbeda dengan sistem koordinat Kartesius.

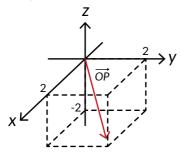
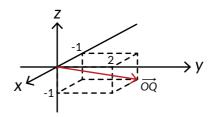
Mintalah siswa mengerjakan Latihan untuk memeriksa pemahaman mereka. Mereka perlu terbiasa dengan sistem koordinat Kartesius untuk menggambar dan menganalisis vektor termasuk konsep vektor satuan dan vektor posisi.

Kunci Jawaban Latihan 3.3

Siswa-siswa dapat menggunakan *Microsoft Word* atau *GeoGebra* untuk menggambar vektor dalam sistem koordinat Kartesius.

1. $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}$

   $\mathbf{OP} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$

2.

3. Vektor satuan $\mathbf{OP} = (\mathbf{2i} + \mathbf{2j} - \mathbf{2k})/\sqrt{12} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$

   Vektor satuan $\mathbf{OQ} = (-\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{6}$

4. **AB** $(-5\ -4)$ atau $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

   CD $(7\ -3)$ atau $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

   EF $(6\ 1)$ atau $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

   GH $(-4\ 2)$ atau $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Kunci Jawaban Latihan 3.4

Ayo Berpikir Kritis

1. Peran vektor dan sistem koordinat dalam mengatur lalu lintas penerbangan sangat penting karena memberikan informasi tentang kedudukan pesawat setiap saat berdasarkan pergerakan pesawat.
2. Perpindahan $\mathbf{OP} = 20\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$
3. Siswa menggunakan ubin di rumah sebagai sistem koordinat dan menentukan perpindahan dari satu lokasi ke lokasi lain dengan menyatakan notasinya.
4. Kecepatan tidak dapat dinyatakan sebagai titik dalam sistem koordinat secara langsung karena sistem koordinat mengatur tentang posisi. Vektor satuan tetap dapat digunakan untuk menunjukkan arah vektor kecepatan.

1. Apakah kalian dapat menunjukkan komponen-komponen suatu vektor dan menentukan panjangnya?
   Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh vektor, menyatakan komponen-komponennya, dan menghitung panjangnya.*
   Saran: Lebih baik kalau siswa bertukar soal dengan temannya.
2. Bagaimana menyatakan komponen-komponen dalam vektor kolom dan vektor baris?
   Sampel Jawaban: *Siswa dapat menggunakan soal nomor 1 untuk menjawabnya.*
3. Apa perbedaan vektor posisi, vektor kolom, dan vektor berkebalikan?
   Sampel Jawaban: *Setiap vektor dapat dinyatakan dalam vektor kolom atau vektor baris. Vektor posisi adalah vektor yang titik pangkalnya merupakan titik O.*

C. Operasi Vektor

Pengalaman Belajar

- Melakukan operasi vektor serta menginterpretasikan hasilnya secara geometris dan fisis.
- Menggunakan operasi vektor untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Penggaris, busur, dan kertas berpetak

Apersepsi

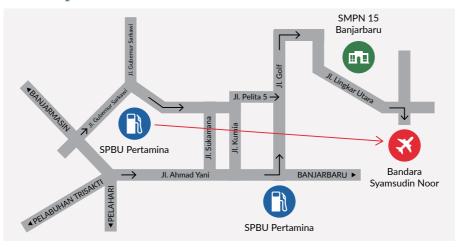
Mengingatkan siswa apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai vektor dan sistem koordinat. Uji pemahaman siswa dengan memberikan pertanyaan, misalkan memberikan beberapa titik A, B, C, dan D. Tanyakan vektor baris atau kolom dari **AB**, **CB**, dan **DA** serta cara mendapatkannya. Jika guru meminta siswa

menuliskan refleksi di jurnal, maka guru dapat menekankan kembali hal-hal yang belum jelas bagi siswa sebagaimana yang ada dalam refleksi mereka.

1. Penjumlahan Vektor

Diskusikan bagaimana menentukan rute dari suatu lokasi ke lokasi yang lain dengan menggunakan kendaraan atau berjalan kaki. Tanyakan, apakah dapat langsung saja menyusuri lintasan seperti vektor dari titik pangkal ke titik ujung atau apakah mungkin mempunyai rute yang berbeda? Diskusikan juga aplikasi rute yang kadang memberikan rute lebih panjang tetapi dengan waktu tempuh lebih pendek.

Setelah diskusi, siswa kerja secara berpasangan untuk melakukan eksplorasi. Siswa dapat menggunakan *Microsoft Word* untuk menggambar vektor pada peta. Setelah siswa-siswa melakukan eksplorasi, diskusikan hasil-hasil eksplorasi dengan meminta siswa mempresentasikan hasilnya. Tanyakan apakah ada yang memiliki rute yang berbeda dari presentasi temannya.

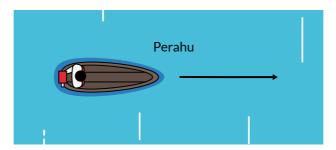
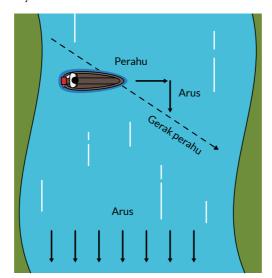
Jawaban Eksplorasi 3.3

Vektor **PB** diperoleh dari penjumlahan 10 vektor.
Hasil penjumlahan vektor disebut sebagai resultan vektor.

Jelaskan bahwa dalam situasi sehari-hari tidaklah banyak rute dari satu lokasi ke lokasi lain yang langsung seperti menggunakan satu vektor saja. Minta siswa mencermati hal-hal khusus dalam penjumlahan vektor.

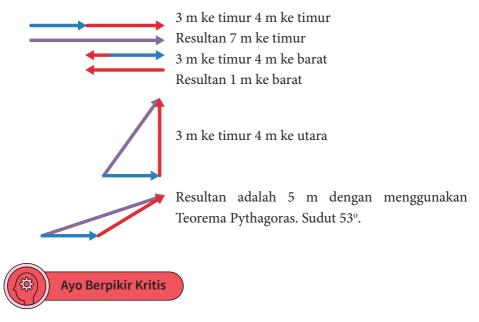
Hal-hal khusus dalam penjumlahan vektor:

1. Titik pangkal vektor resultan adalah titik pangkal vektor awal dan titik ujung vektor resultan adalah titik ujung vektor akhir.
2. Titik ujung vektor sebelumnya selalu bertemu dengan titik pangkal vektor berikutnya.

Jawaban Eksplorasi 3.4

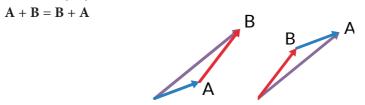
1. Jika kelajuan arus sungai nol maka gerak perahu tidak berubah.

2. Jika kelajuan arus sungai tidak nol maka gerak perahu berubah, baik arah maupun kelajuannya.

Jika diketahui kelajuan perahu dan kelajuan arah sungai, berapa kelajuan perahu akibat arus sungai? Bagaimana cara menentukannya?
Diskusikan contoh-contoh dalam kehidupan sehari-hari seperti contoh eksplorasi. Contoh sederhana, bagaimana gerak sepeda jika angin mendorong sepeda dari belakang ke depan atau sebaliknya?

Untuk mendapat gambaran lebih jelas tunjukkan perbedaan penjumlahan skalar dengan penjumlahan vektor. Jelaskan bahwa 3 kg gula dijumlah dengan 4 kg gula pasti menghasilkan 7 kg gula. Jika suhu awal 3°C kemudian bertambah 4°C maka suhu akhir pasti 7°C.

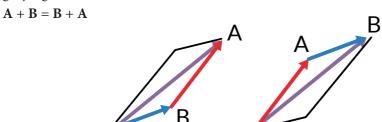
Bagaimana jika berpindah 3 m kemudian berpindah lagi 4 m? Perpindahan akhir sangat banyak kemungkinan. Beberapa contoh di bawah ini adalah.

Penjumlahan skalar hanya menghasilkan satu jawaban, sedangkan penjumlahan vektor menghasilkan berbagai jawaban karena vektor berkaitan dengan arah.

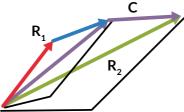
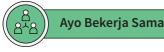
Pastikan siswa memahami penjumlahan vektor dengan metode segitiga dan sifat komutatif penjumlahan vektor dengan menggunakan metode segitiga.

Menunjukkan penjumlahan dua vektor bersifat komutatif dengan menggunakan metode segitiga.

A + B = B + A

Pastikan siswa memahami penjumlahan vektor dengan metode jajar genjang.

Menunjukkan penjumlahan dua vektor bersifat komutatif dengan metode jajar genjang.

A + **B** = **B** + **A**

Pastikan siswa memahami penjumlahan vektor dengan metode jajar genjang.

Jika ada tiga vektor, maka dua vektor dijumlahkan terlebih dahulu secara jajar genjang. Hasilnya R_1. R_1 dijumlahkan lagi dengan vektor lain secara jajar genjang sehingga diperoleh R_2.

Pastikan setiap anggota kelompok terlibat.

Setelah kerja kelompok berikan kesempatan kepada setiap kelompok untuk mempresentasikan hasilnya.

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi dan berpikir kreatif.

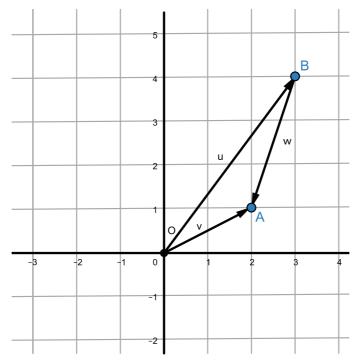
1. Apakah kalian dapat melakukan penjumlahan vektor secara grafis?

   Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh penjumlahan vektor dengan metode segitiga, metode jajar genjang dan metode poligon.*

2. Apakah kalian dapat melakukan penjumlahan vektor dengan menjumlahkan komponen-komponennya?

   Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh pada (1) dengan menjumlahkan secara komponen.*

2. Pengurangan Vektor

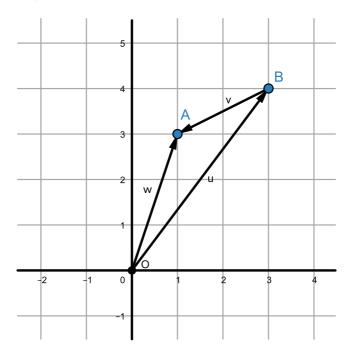
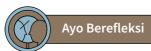
Diskusikan kembali penjumlahan vektor. Bagaimana dengan pengurangan vektor? Minta siswa menyampaikan ide-idenya kemudian siswa mengerjakan eksplorasi.

Siswa bekerja secara berpasangan untuk melakukan eksplorasi. Siswa dapat menggunakan *Microsoft Word* atau *GeoGebra* untuk menggambar vektor. Setelah siswa-siswa melakukan eksplorasi, diskusikan hasil-hasil eksplorasi dengan meminta siswa mempresentasikan hasilnya. Tanyakan, bagaimana menuliskan penjumlahan

kedua vektor dan hasilnya dengan meminta siswa memperhatikan **u** + **w** = **v**. Setelah itu minta siswa melakukan pengurangan antara u dan v sehingga penulisan adalah sebagai berikut **u** - **v** = -**w**,

Vektor baris dari **w** adalah (-1 -3) sedangkan vektor baris dari -**w** adalah (1 3). Secara komponen (3 4) – (2 1) = (1 3). Hasil pengurangan secara komponen sesuai dengan hasil secara grafis.

Minta siswa berpikir bagaimana menggambar kedua vektor jika diberikan **u** – **v** = -**w**

Jelaskan bahwa pengurangan dua vektor lebih mudah dengan menggunakan penjumlahan.

Sesuai dengan eksplorasi maka **u** – **v** = **u** + -v = -w

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi dan berpikir kreatif.

1. Apakah kalian dapat melakukan pengurangan vektor secara grafis?

   Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh pengurangan vektor dengan metode segitiga dan metode jajar genjang.*

2. Apakah kalian dapat melakukan pengurangan vektor dengan mengurangi komponen-komponennya?

   Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh pada (1) dengan mengurangi secara komponen.*

3. Perkalian Skalar dengan Vektor

Diskusikan kembali penjumlahan dan pengurangan vektor sebelum melakukan eksplorasi.

Setelah diskusi, siswa bekerja secara berpasangan untuk melakukan eksplorasi. Siswa dapat menggunakan Microsoft Word untuk menggambar vektor pada peta. Setelah siswa-siswa melakukan eksplorasi, diskusikan hasil-hasil eksplorasi dengan meminta siswa mempresentasikan hasilnya.

Jawaban Eksplorasi 3.6

Sumber: shutterstock.com/Rainer Lesniewski

1. Panjang **BR** = 3,4 cm.

   Panjang **BU** = 2,2 cm = 0,65 **BR**.

   Panjang **UR** = 1,2 cm = 0,35 **BR**
2. Ketiganya mempunyai arah yang sama.

Jelaskan perkalian skalar dengan vektor berdasarkan Gambar 3.36. Skalar dapat bernilai positif atau negatif, dapat juga bernilai lebih dari satu atau kurang dari satu.

Ayo Bekerja Sama

Setiap kelompok membuktikan perkalian skalar dengan vektor secara grafis (pada kertas berpetak) dan secara komponen memberikan hasil yang sama. Setiap kelompok menentukan satu vektor terlebih dahulu. Setiap anggota dapat memlih skalar yang diinginkan tetapi harus berbeda.

Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi dan berpikir kreatif.

1. Apakah kalian dapat melakukan perkalian skalar dengan vektor secara grafis?

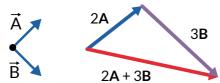
   Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh perkalian skalar dengan vektor secara grafis. Nilai skalar bervariasi.*
2. Apakah kalian dapat melakukan perkalian vektor dengan skalar secara komponen?

   Sampel Jawaban: *Siswa memberikan contoh-contoh pada (1) dengan melakukannya secara komponen.*

Minta siswa mengerjakan Latihan dan perhatikan apakah siswa sudah dapat mengerjakannya.

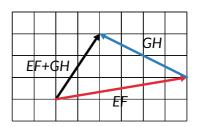
Kunci Jawaban Latihan 3.5

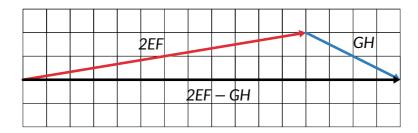
1. 2 **A** + 3 **B**

2. **OA - OB**

OA – **OB** = (-6 8) – (3 2) = (-9 6)

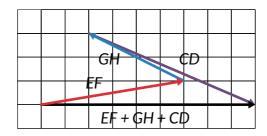
Hasil secara komponen sesuai dengan hasil secara grafis yang ditunjukkan oleh vektor **a**.

3. Menentukan resultan vektor

a. $$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$|r| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{13}$$

b. $$2\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GH} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

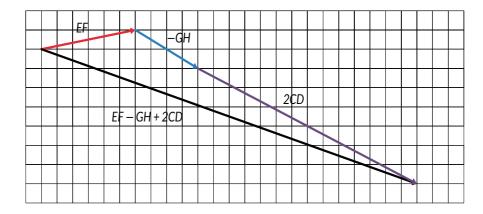
$|r| = 16$

c. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|r| = 9$

d. $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

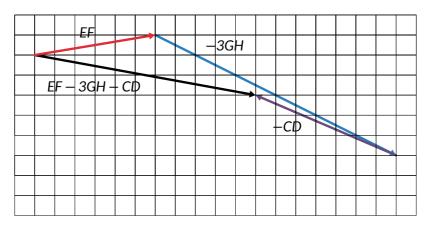
$= \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \end{pmatrix}$

$|r| = \sqrt{24^2 + (-7)^2}$

$= 25$

e. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$$

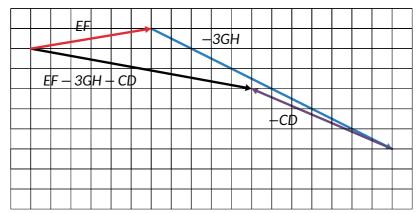
$$|r|=\sqrt{4^2+(-4)^2}$$

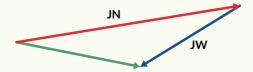
$$=4\sqrt{2}$$

f. $\overrightarrow{EF}-3\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}11\\-2\end{pmatrix}$$

$$|r|=\sqrt{11^2+(-2)^2}$$

$$=\sqrt{125}$$

$$=5\sqrt{5}$$

4. Peta Papua

Resultan dari **JW** - **JN**

Kunci Jawaban Latihan 3.6

1. Menunjukkan sifat komutatif

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

2. Metode jajar genjang merupakan salah satu metode penjumlahan vektor karena sebenarnya jajar genjang mempunyai dua pasang sisi yang sejajar.
3. Misalkan A (-3, 2, -1), B (1, 5, -6) dan C (5, 8, -11)
   Vektor baris dari AB adalah (4 3 -5) dan AC juga adalah (4 3 -5)
   AB dan **AC** memiliki titik pangkal yang sama dan keduanya sejajar maka titik A, B, dan C segaris.

4. Resultan vektor $\sqrt{1.000.000 + 250.000} = \sqrt{1.250.000} = 500\sqrt{5}$
5. Siswa membuat 3 vektor sembarang **a**, **b**, dan **c** pada kertas berpetak. Gambarkan hasil 2**a** + **b** -2**c**.

Refleksi

Pada akhir pembelajaran bab ini, mintalah kepada siswa untuk memikirkan kembali apa saja yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan penuntun sebagai upaya guru untuk memastikan bahwa siswa sudah mencapai tujuan pembelajaran. Uji Kompetensi juga diberikan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran dari bab ini.

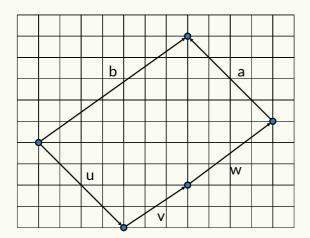
Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

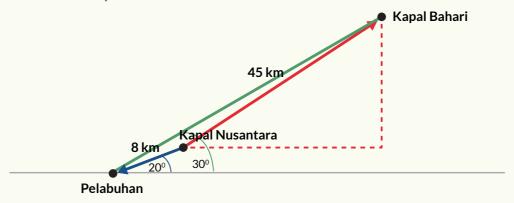
1. Vektor **AB** = (5 0 8) – (3 -6 0) = (2 6 8)

   Panjang vektor

   $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\0\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix}$$

2. Penjumlahan dua vektor yang menghasilkan nol haruslah mempunyai besar yang sama tetapi arah yang berlawanan.
3. Penjumlahan tiga vektor yang besarnya berbeda dapat menghasilkan vektor nol
4. Arah gerak ke selatan dan kelajuan 1,6 m/s.
5. Resultan vektor.

Pengayaan

Kapal Bahari berada pada posisi 30° dan sejauh 45 km dari tempat kapal bersandar di pelabuhan. Kapal Nusantara menuju pelabuhan dengan sudut 20° dan berjarak 8 km dari tempat kapal bersandar. Gambarlah vektor perpindahan kapal Bahari terhadap Kapal Nusantara. Gunakan busur dan penggaris untuk menentukan sudut dan jaraknya.

Alternatif Penyelesaian :

Jarak tegak antar kedua kapal ≈19,8 km

Jarak mendatar antar kedua kapal ≈31,5 km

Panjang vektor yang terbentuk ≈37 km (Jarak antara kapal Bahari dan Nusantara)

Sudut vektor yang terbentuk terhadap garis horizontal ≈32°

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

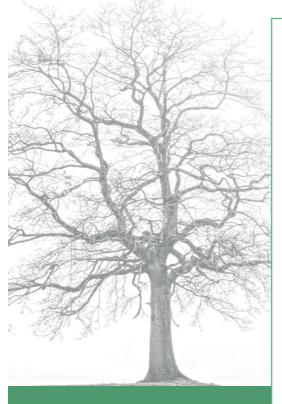
Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab 4

Panduan Khusus

Perbandingan Trigonometri

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan dapat:

1. Menamai sisi segitiga dengan tepat sesuai dengan sudut segitiganya.
2. Menerapkan perbandingan trigonometri untuk mencari panjang sisi segitiga yang tidak diketahui.
3. Membuktikan sinus dan cosinus dari suatu sudut pada segitiga siku-siku berupa rasio, bukan nilai tetap.
4. Memberikan penjelasan mengapa nilai dari perbandingan trigonometri suatu sudut bisa selalu sama dan dapat dihitung dengan kalkulator.
5. Memberikan bukti sinus dan cosinus sudut komplementer adalah sama besarnya.
6. Mencari solusi permasalahan sehari-hari dengan menerapkan perbandingan trigonometri (sin θ, cos θ, tan θ).

Bab Trigonometri bertujuan memperkenalkan siswa pada konsep perbandingan trigonometri. Konsep perbandingan trigonometri perlu diajarkan dengan pemahaman yang tepat agar siswa dapat dengan lancar mengembangkan pemahaman ke dalam konteks yang lebih kompleks serta pada mata pelajaran lain khususnya mata pelajaran Fisika. Melalui bab ini, siswa akan dapat menjelaskan mengapa nilai perbandingan trigonometri pada segitiga yang sebangun adalah sama. Mereka membangun pemahaman bahwa walaupun ukuran segitiga siku-siku berbeda-beda, tapi perbandingan panjang sisinya akan sama apabila besaran sudut segitiganya sama. Siswa juga diajak melihat banyaknya penerapan yang bermanfaat dari perbandingan trigonometri untuk mendukung dan mengembangkan pemahaman mereka.

Pada subbab A, siswa melakukan eksplorasi perbandingan panjang bayangan dan tinggi seseorang. Dari kegiatan eksplorasi, siswa diperkenalkan dengan nilai perbandingan tangen. Siswa juga akan belajar mengidentifikasi nama sisi segitiga siku-siku sesuai dengan sudut yang ditentukan. Siswa kemudian melihat dan mencoba menerapkan prinsip perbandingan trigonometri tangen dalam persoalan pada kehidupan sehari-hari.

Pada subbab B, siswa melakukan eksplorasi penerapan perbandingan trigonometri pada bangun ruang dan diajak untuk membandingkan perubahan nilai perbandingan trigonometri ketika salah satu sudut segitiga siku-siku diperbesar atau diperkecil. Melalui kegiatan ini, siswa akan mengembangkan pemahaman sinus dan cosinus. Mereka juga melakukan kegiatan eksplorasi dengan segitiga siku-siku sama kaki dan segitiga sama sisi untuk menemukan nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa. Selain itu, siswa juga akan diajak melihat penerapan konsep pada kehidupan sehari-hari agar pemahamannya matang dan lebih luwes di berbagai konteks.

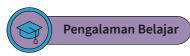
Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk Metode dan Aktivitas	Sumber Utama
A. Perbandingan Trigonometri	6	• Mengenal perbandingan trigonometri tangen sebagai nilai perbandingan.	• Penamaan sisi segitiga siku-siku • Perbandingan Trigonometri tangen.	• Sisi depan • Sisi samping • Sisi miring • θ (theta) tangen	*Discovery Learning*	Buku Siswa
B. Pemanfaatan Perbandingan Trigonometri	6	• Mengenal perbandingan trigonometri sinus dan cosinus sebagai nilai perbandingan.	• Perbandingan trigonometri sinus & cosinus • Perbandingan trigonometri sudut istimewa	• Sinus • Cosinus	*Discovery Learning*	Buku Siswa

Catatan:
* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pemebelajaran

A. Perbandingan Trigonometri

Pengalaman Belajar

- Menamai sisi segitiga dengan tepat sesuai dengan sudut segitiganya.
- Menerapkan perbandingan trigonometri untuk mencari panjang sisi segitiga yang tidak diketahui.
- Memberikan penjelasan tangen dari suatu sudut pada segitiga siku-siku berupa rasio.
- Memberikan penjelasan mengapa nilai dari perbandingan trigonometri suatu sudut bisa selalu sama dan dapat dihitung dengan kalkulator.
- Mencari solusi permasalahan sehari-hari dengan menerapkan perbandingan trigonometri (tan θ).

Kebutuhan Sarana Prasarana dan Media Pembelajaran

Tempat yang cukup luas untuk percobaan bayangan.

- Sumber cahaya.
- Untuk proyek pengayaan: selotip, gunting, sedotan, busur, tali, dan panah yang terbuat dari karton.

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan PEMBUKA BAB dan menanyakan kepada siswa objek apa yang ingin mereka ukur ketinggiannya jika mereka mempunyai alat theodolit. Setelah itu, sampaikan keempat pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban dari keempat pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai peluang. Pertanyaan pemantik juga dapat dituliskan pada kertas poster dan dipajang agar siswa dapat terus merujuk kembali kepadanya.

Gunakan bagian MENGINGAT KEMBALI mengenai teori Pythagoras, nilai perbandingan, dan kesebangun segitiga yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa:

- Bagaimana cara mencari panjang sisi segitiga jika kita hanya mengetahui panjang kedua sisi segitiga lainnya?
- Berikan contoh rasio/nilai perbandingan dalam kehidupan sehari-hari.
- Berikan beberapa pasang gambar segitiga kepada siswa. Apakah kedua segitiga ini sebangun?

Mulai aktivitas pembelajaran dengan menanyakan kepada siswa mengenai panjang keliling bumi. Tanyakan juga kepada siswa bagaimana ilmuwan bisa sampai menemukan angka tersebut. Ajak siswa menonton video yang disediakan dan minta siswa memperhatikan bagaimana matematikawan Erasthotenes menggunakan nilai perbandingan untuk memecahkan masalah. Setelah selesai, minta siswa melakukan Eksplorasi 4.1 di PERMASALAHAN PEMBUKA. Siswa dapat melakukan eksplorasi secara mandiri dengan melakukan percobaan bayangan, namun, jika tidak memungkinkan, siswa dapat menggunakan gambar yang tersedia.

Dengan mengikuti petunjuk di Buku Siswa, guru akan berperan sebagai pembimbing dan fasilitator dalam kegiatan ini. Berikan arahan, bukan jawaban, supaya siswa dapat mengembangkan keterampilan pemecahan masalah dan kolaborasi melalui kegiatannya.

Pada nomor 2 dan 4, siswa seharusnya mendapatkan nilai perbandingan dan besaran sudut yang sama. Berikan ruang kepada siswa untuk menebak dan bernalar dalam menjawab pertanyaan pemantik pada kegiatan ini. Jangan memberikan jawaban terlebih dahulu, karena hal ini akan dilakukan pada bagian selanjutnya.

1. Penamaan Sisi Segitiga Siku-Siku

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan PENJELASAN KONSEP. Sebelum Latihan Mandiri 4.1, berikan beberapa contoh segitiga lainnya (yang tidak sama dengan yang ada pada Buku Siswa) dan minta siswa mengidentifikasi nama sisinya. Latihan Mandiri 4.1 dapat dilakukan oleh siswa secara mandiri kemudian kolaborasi. Pastikan pada akhirnya guru memberikan jawaban yang benar dengan penjelasan. Latihan Mandiri 4.1 ini akan memberikan gambaran kepada guru tingkat pemahaman siswa pada topik ini.

2. Satu Jenis Perbandingan Trigonometri: $tan\ \theta$

Setelah ini guru akan memperkenalkan perbandingan trigonometri tangen dan mengaitkannya dengan hasil eksplorasi. Gunakan pertanyaan-pertanyaan di bagian Ayo Mengingat Kembali dan Ayo Berpikir Kreatif untuk memulai diskusi kelas dan menyokong pemahaman siswa.

Pada subbab ini, guru tidak akan memperkenalkan ketiga perbandingan trigonometri sekaligus karena praktik ini sering kali membingungkan siswa. Tidak jarang juga ditemukan kasus di mana siswa menghafalkan singkatan untuk mengingat rumus sin, cos, dan tan tanpa benar-benar mengerti apa itu perbandingan trigonometri dan kegunaannya. Dengan dasar inilah, buku ini menyarankan guru hanya memperkenalkan satu perbandingan trigonometri terlebih dahulu dan memastikan pemahaman yang dalam dan tepat mengenai konsep ini. Dengan demikian, ketika sinus dan cosinus diperkenalkan di subbab selanjutnya, siswa akan dengan mudah memahami dan dapat menerapkan perbandingan trigonometri dengan tepat berdasarkan konteks permasalahannya.

Kegiatan Latihan 4.2 bertujuan untuk memberikan siswa pengalaman pembelajaran bahwa segitiga yang sebangun memiliki nilai perbandingan trigonometri yang sama. Pada latihan ini, guru juga mengambil peran menjadi pembimbing dan fasilitator. Berikan kesimpulan kegiatan latihan bahwa setiap kelompok mendapatkan nilai tan 40^{o} yang sama pada segitiga yang berbeda-beda. Untuk memastikan pengertian siswa, tanyakan mengapa hal ini bisa terjadi dan minta mereka menjelaskan

3. Kegunaan Perbandingan Trigonometri: $tan\ \theta$

Bagian ini adalah contoh penerapan perbandingan trigonometri tangen untuk memecahkan masalah sehari-hari. Pada buku siswa, dua metode penyelesaian dipaparkan untuk membantu siswa melihat bahwa dengan perbandingan trigonometri, penghitungan matematika yang dilakukan dapat lebih ringkas dan efisien. Guru dapat memberikan pertanyaan pancingan supaya siswa dapat sampai pada kesimpulan tersebut. Pertanyaan pemancing seperti "Cara mana yang lebih mudah untuk kalian? Apakah ada cara yang lebih cepat dibandingkan yang lain?"

Kegiatan latihan 4.3 dilakukan siswa untuk memperkuat pemahaman penggunaan perbandingan trigonometri dalam memecahkan masalah. Nomor pertama khususnya sangat mirip dengan contoh sehingga bisa digunakan untuk siswa yang kurang mengerti contoh sebelumnya.

Diferensiasi

Bagi siswa yang **mengalami kesulitan menentukan nama sisi segitiga**, berikan waktu yang cukup untuk siswa mencoba kegiatan berikut ini.

Berikan gambar segitiga siku-siku dan minta siswa mengidentifikasi salah satu sudut lancipnya. Beri waktu untuk siswa mengidentifikasi nama sisi segitiganya. Jika siswa mengalami kesulitan, guru dapat meminta siswa menggunakan jari untuk mengarahkan ke sisi depan/sisi samping/sisi miring. Pastikan juga siswa mengerti bahwa sisi miring adalah sisi di depan sudut siku-siku, bukan sisi yang "terlihat miring". Siswa juga perlu diberi waktu untuk melakukan kegiatan yang sama, namun sekarang segitiganya diputar sehingga bentuk bangun datar terlihat sedikit berbeda. Ulangi dengan beberapa jenis segitiga sampai siswa mahir dan mengerti. Jika kegiatan ini tidak mungkin dilakukan pada jam pelajaran, guru dapat memberikan tugas latihan ini kepada siswa dalam bentuk PR.

Bagi siswa yang **mengalami kesulitan memahami perbandingan trigonometri tangen**, berikan waktu yang cukup agar siswa mencoba kegiatan ini.

Minta siswa membuat 3 segitiga siku-siku dengan ukuran berbeda-beda namun dengan satu sudut yang sama misalnya 60o. Minta siswa mencari nilai perbandingan sisi depan dan sisi samping. Kemudian tanyakan kepada siswa mengapa hasilnya sama? Tunjukkan juga jika ketiga segitiga tersebut ditata dengan ditumpuk, akan terlihat bahwa mereka adalah segitiga sebangun. Jika kegiatan ini tidak mungkin dilakukan pada jam pelajaran, guru dapat memberikan tugas latihan ini kepada siswa dalam bentuk PR.

Bagi siswa yang **kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*)**, minta mereka mencari berbagai nilai tan dari sudut 10 derajat sampai 80 derajat. Minta mereka untuk mencari kesimpulan pola nilai perbandingan tangen saat ukuran sudut bertambah besar. Pastikan mereka memahami penjelasan polanya dan menuliskan penjabarannya di buku tulis. Jika ada waktu cukup, kelompok siswa ini dapat diberikan kesempatan untuk mempresentasikan penemuan mereka. Jika kegiatan ini tidak mungkin dilakukan pada jam pelajaran, guru dapat memberikan tugas latihan ini kepada siswa dalam bentuk PR.

Kunci Jawaban Latihan 4.1

1. V = Sisi depan
   X = Sisi samping
   Z = Sisi miring

2. Putri harus memperhatikan letak sudut yang dirujuk. Sisi depan sudut 30^o adalah sisi n, bukan sisi m. Sisi samping sudut 30^o adalah sisi m, bukan sisi n. Putri sudah benar mengidentifikasi sisi miringnya yaitu sisi o.

Kunci Jawaban Latihan 4.2

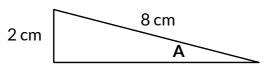
1. Tidak bisa. Untuk mencari nilai perbandingan tangen, segitiga yang dirujuk haruslah segitiga siku-siku. Segitiga pada soal ini tidak memenuhi kriteria segitiga siku-siku karena tidak ada sudut siku-sikunya.

Untuk soal nomor 2, 3, 4, dan 5:

Kesimpulan yang diharapkan siswa dapatkan melalui kegiatan latihan ini adalah bahwa nilai tan 40^o berupa nilai perbandingan yang benar adanya pada segitiga sekalipun ukurannya berbeda-beda. Untuk memeriksa pemahaman siswa, guru dapat bertanya bila jawaban perbandingan tan 45^o pada segitiga dengan ukuran berbeda-beda akan sama atau berbeda

Kunci Jawaban Latihan 4.4

Soal Pemahaman

1. Siswa menggambar segitiga dengan sisi samping yang 4 kali lebih panjang dari sisi depan berdasarkan letak   pada segitiganya. Contoh jawaban yang tepat:

2. a. x = 12.07 cm
   b. x = 9.23 cm
   c. x = 11.25 cm

3. Bagian pertama:
   a. Miring
   b. Depan
   c. Samping

Bagian kedua:

a. Miring
b. Samping
c. Depan

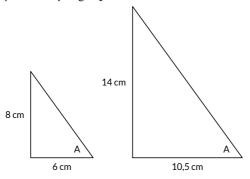
Bagian ketiga:

a. Biru
b. Hijau
c. Hijau
d. Biru
e. Merah
f. Merah

Bagian keempat:

a. Berbeda. Sisi depan sudut 30º dan 60º berbeda karena letak sudut yang berbeda.
b. Berbeda. Sisi samping sudut 30º dan 60º berbeda karena letak sudut yang berbeda.
c. Sama. Sisi miring sudut 30º dan 60º sama karena definisi sisi miring adalah sisi di depan sudut siku-siku. Letak sudut siku-siku tidak berubah pada segitiga yang ditampilkan.

Soal Aplikasi

4. a. Siswa menggambar dua buah segitiga dengan sisi depan yang $\frac{4}{3}$ kali lebih panjang dari sisi samping berdasarkan letak ∠A pada segitiganya. Contoh jawaban yang tepat:

b. Ya, ada lebih dari dua segitiga yang memenuhi nilai perbandingan tersebut. Ukuran segitiga dapat berubah asalkan perbandingan panjang sisinya sama, maka hasil tan ∠A juga akan tetap sama.

5. a. Siswa perlu mengidentifikasi bahwa ∠BCA adalah 45º. Kemudian siswa dapat mencari bahwa tangen 45º = 1 di mana tangen adalah perbandingan sisi depan (x) dengan sisi CA. Jadi x = 814. Panjang jalan yang perlu direncanakan untuk menghubungkan titik B ke A adalah 814 meter.

   b. $\frac{814}{1151} \approx 0,707$

   c. $\frac{814}{1151} \approx 0,707$

   d. Segitiga sebangun mempunyai perbandingan nilai sisi yang sama. Karena segitiga ABC dan ADC mempunyai satu sisi yang sama panjang yaitu sisi CA (814 m) maka siswa dapat menyimpulkan bahwa panjang CD adalah sama dengan panjang BC. Panjang sisi CD sama dengan 1.151 m.

6. a. Panjang sisi AC adalah 150 m.

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ = 1,73 &= \frac{\text{AC}}{\text{BC}} \\ 1,73 &= \frac{150 \text{ m}}{\text{BC}} \\ BC &= \frac{150 \text{ m}}{1,73} \\ BC &= 86,71m \end{aligned}$$

   b. Panjang CD dapat dicari dengan:

$125 \text{ m} - 86,71 \text{ m} = 38,29 \text{ m}$

Soal Penalaran

7. $$\begin{aligned} \tan 3^\circ &= \frac{200 \text{ m}}{x} \\ 0,05 &= \frac{200 \text{ m}}{x} \\ x &= 4.000 \text{ m} \end{aligned}$$

8. a. $$\begin{aligned} \tan 31^\circ &= \frac{x}{200 \text{ m}} \\ 0,6 &= \frac{x}{200 \text{ m}} \\ x &= 240 \text{ m} \end{aligned}$$

   b. Strateginya tepat dan akan berguna untuk memastikan perhitungan yang akurat. Strategi ini berguna karena menggunakan penerapan perbandingan trigonometri yang sama dengan strategi awalnya. Yang dilakukan oleh ahli bangun adalah mencari data tambahan yang dapat memberikan konfirmasi atas data awalnya

9. a. Panjang sisi depan dapat ditemukan dengan mencari nilai perbandingan trigonometri tangen.

$$\tan 34^\circ = \frac{x}{52 \text{ m}}$$
$$0,67 = \frac{x}{52 \text{ m}}$$
$$x = 34,38 \text{ m}$$

   b. Pernyataan teman Dimas tidak tepat. Panjang sisi depan tidak sama dengan tinggi tiang bendera karena tinggi Dimas perlu dimasukkan ke dalam perhitungan. Berdasarkan Gambar 4.28, segitiga yang terbentuk bermula dari ketinggian mata Dimas. Maka, untuk mencari tinggi tiang bendera, kita harus menambahkan tinggi Dimas.

Proyek Pengayaan

Guru dapat memperkenalkan istilah sudut elevasi dan sudut depresi secara sederhana menggunakan contoh dan mengajak siswa membuat alat clinometer. Setelah selesai membuat clinometer, ajak siswa untuk berpikir kritis cara mengukur sudut yang akurat menggunakan alat ini. Berikan waktu yang cukup untuk siswa mencoba dan mengeksplorasi alat yang baru mereka buat. Minta pendapat beberapa siswa sebelum guru melanjutkan dengan memberi kesimpulan.

Untuk kegiatan mengukur, guru dapat memberikan ini sebagai tugas kelompok atau sebagai pekerjaan rumah. Berikan beberapa kesempatan kepada siswa untuk mencoba mengukur tinggi beberapa objek yang berbeda-beda. Supaya pengalaman siswa dapat dimanfaatkan sebaik-baiknya, guru juga dapat meminta siswa menuliskan jurnal matematika dalam pengerjaan proyek ini.

B. Pemanfaatan Perbandingan Trigonometri

Pengalaman Belajar

- Menerapkan perbandingan trigonometri untuk mencari panjang sisi segitiga yang tidak diketahui.
- Memberikan penjelasan sinus dan cosinus dari suatu sudut pada segitiga siku-siku berupa rasio.
- Memberikan penjelasan bagaimana sudut istimewa perbandingan trigonometri bisa ada.
- Mencari solusi permasalahan sehari-hari dengan menerapkan perbandingan trigonometri (sin, cos, dan tan θ).

Kebutuhan Sarana Prasarana dan Media Pembelajaran

Sejumlah perangkat untuk membuka website *GeoGebra*

Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan menunjukkan gambar piramida kepada siswa dan menanyakan beberapa pertanyaan pemancing berikut.

- Apa yang kalian ketahui mengenai piramida?
- Menurut kalian, apa kaitan piramida dengan perbandingan trigonometri?
- Apakah ada segitiga siku-siku pada bangun ruang piramida? Coba tunjukkan dengan gambar.

Guru dapat memberikan waktu kepada siswa untuk berdiskusi dengan teman sekelompoknya sebelum beberapa siswa diberi kesempatan untuk menyampaikan pendapatnya di depan kelas.

Setelah membaca kedua paragraf yang tertulis di buku siswa, perkenalkan kegiatan eksplorasi 2 di mana siswa akan menggunakan imajinasinya untuk menentukan perubahan yang terjadi apabila sudut kemiringan pada piramida diperbesar atau diperkecil.

Berikut adalah jawaban dari pertanyaan-pertanyaan pada bagian eksplorasi 2:

- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan tinggi piramida? **Piramida akan menjadi semakin tinggi.**
- Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan tinggi piramida? **Piramida akan menjadi semakin pendek.**
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan panjang jari-jarinya? **Jari-jarinya akan menjadi lebih pendek.**
- Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan panjang jari-jarinya? **Jari-jarinya akan menjadi lebih panjang.**
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi sampingnya (tan θ)? **Nilai tangennya akan bertambah besar karena tingginya semakin besar dan jari-jarinya semakin kecil.**
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi miring segitiga siku-siku? **Nilai perbandingan sisi depan dan sisi miringnya akan bertambah besar karena tinggi piramidanya akan semakin besar.**
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi samping dan sisi miring segitiga siku-siku? **Nilai perbandingan sisi samping dan sisi miringnya akan berkurang karena jari-jari piramida yang semakin mengecil.**

Pastikan siswa diberikan waktu yang cukup untuk berlatih menyampaikan argumen matematis dengan runtut logika yang baik dan benar. Pada saat siswa sedang berdiskusi, tugas guru adalah berkeliling dan memberikan pertanyaan-pertanyaan pancingan untuk memperdalam diskusi dan pemikiran siswa.

Diferensiasi

Untuk siswa yang **kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*)**, guru dapat memberikan mereka pertanyaan tambahan yaitu.

Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi sampingnya (tan θ)?

Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi miring segitiga siku-siku?

Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi samping dan sisi miring segitiga siku-siku?

Metode & Aktivitas Pembelajaran

1. Penamaan Sisi Segitiga Siku-Siku

Kaitkan dua pertanyaan paling akhir pada bagian eksplorasi 2 untuk memperkenalkan nilai perbandingan sinus dan cosinus. Gunakan contoh penerapan perbandingan trigonometri sinus dan cosinus dalam konteks bangun piramida untuk menjelaskan arti/definisinya. Ajak siswa untuk berefleksi tentang perbedaan dan persamaan antara perbandingan trigonometri sin, cos, dan tan.

Contoh soal mengenai Wanimbo yang sedang bermain layangan adalah salah satu contoh soal HOTS. Setelah membaca persoalannya, minta siswa berpikir kritis mengenai perbandingan trigonometri mana yang cocok untuk diterapkan dalam penyelesaian masalah ini. Minta siswa berdiskusi dalam kelompoknya sebelum dibawa ke pembahasan seluruh kelas. Lakukan prosedur yang sama untuk diskusi mengenai jawaban Surya yang salah. Jika pada akhirnya kebanyakan siswa tidak dapat mencapai kesimpulan yang diinginkan, guru dapat meminta siswa untuk menjelaskan alasan mengapa jawaban Surya salah kepada teman sebangkunya.

Jawaban contoh soal.

Solusi yang diberikan Surya tidak tepat karena ia tidak memperhitungkan ketinggian ujung layangan yaitu 60 cm dari permukaan. Ujung layangan tidak berada pada dasar tanah, melainkan digenggam oleh Wanimbo di ketinggian 60 cm. Seharusnya, tinggi layangan yang digunakan dalam persamaan Surya perlu dikurangi 60 cm terlebih dahulu

$3,5 \text{ m} - 60 \text{ cm} = 2,9 \text{ m}$

$$\begin{aligned} 0,34 &= \frac{2,9 \text{ m}}{x \text{ m}} \\ x &= 8,53 \text{ m} \end{aligned}$$

2. Tiga Serangkai Perbandingan Trigonometri

Bagian ini bertujuan membantu merangkum atau menyimpulkan ketiga perbandingan trigonometri yang telah dipelajari oleh siswa. Sekali lagi, guru perlu memastikan bahwa siswa mengerti arti perbandingan trigonometri sebagai nilai perbandingan. Berikan waktu kepada siswa untuk menuliskan artinya sendiri-sendiri kemudian minta

siswa menukarkan tulisannya secara acak. Siswa yang menerima jawaban temannya harus memberikan penilaian mengenai ketepatan jawaban dengan memberikan usul tambahan atau catatan.

Dalam kegiatan Ayo Menggunakan Teknologi, berikan panduan untuk siswa melakukan kegiatan sesuai dengan arahan yang tertulis. Visualisasi yang dapat dilakukan pada media pembelajaran ini diharapkan dapat memperdalam dan memperkaya pengertian siswa bahwa perbandingan trigonometri adalah nilai perbandingan. Kegiatan ini mungkin akan sangat bermanfaat bagi siswa yang sulit mengerti atau belum sepenuhnya mempunyai pemahaman yang benar. Himbau siswa yang membutuhkan untuk mencoba kegiatan ini kembali di rumah saat mereka luang.

3. Sudut Istimewa Perbandingan Trigonometri

Pimpin siswa untuk melakukan kegiatan eksplorasi untuk melengkapi tabel sudut istimewa perbandingan trigonometri.

Jawaban untuk tabel

	30^o	45^o	60^o
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Setelah menemukan jawaban untuk tabel sudut istimewa, guru dapat memberikan beberapa saran supaya siswa tidak perlu menghafal isi tabel. Ingatkan siswa bahwa di subbab sebelumnya, ia sudah mengerjakan soal yang membuktikan bahwa nilai sin dari sebuah sudut lancip segitiga siku-siku sama dengan nilai cos dari sudut lancip satunya.

Diferensiasi

Bagikan prinsip berikut kepada siswa, khususnya **yang memiliki kesulitan dalam menentukan perbandingan trigonometri yang tepat untuk diterapkan dalam konteks tertentu.**

- Dalam setiap permasalahan trigonometri, akan ada satu bilangan yang diketahui (misalnya x). Perbandingan trigonometri yang digunakan biasanya adalah yang mengandung bilangan x sebagai salah satu komponennya.
- Sebelum mengerjakan persoalan, identifikasi segitiganya dan sudut pada segitiga siku-siku. Pastikan perbandingan trigonometri yang digunakan akan mencapai jawaban yang diinginkan.

Untuk siswa **yang kesulitan dalam membedakan nilai perbandingan sinus, cosinus, dan tangen**, berikan latihan-latihan sederhana maupun singkatan yang membantu ingatan (*mnemonic*). Guru dapat menggunakan video Youtube (sampai menit ke 3:25 saja) dengan memindai kode QR berikut.

Kunci Jawaban Latihan 4.5

1. a. Aku tahu bahwa $\sin\theta = \dfrac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}}$

   Aku tahu $\angle P = 53,2^\circ$

   Sisi depan $\angle P$ adalah sisi QR yang panjangnya 4 unit.

   sisi miring (hipotenusa) segitiga siku-siku ini adalah sisi PQ yang panjangnya 5 unit.

   Jadi, $\sin 53,2^\circ = \dfrac{4}{5}$

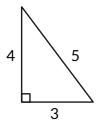
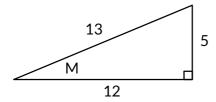
   b. Aku tahu bahwa $\cos\theta = \dfrac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}}$

   Aku juga tahu sisi QR adalah sisi samping $\angle Q = 36,8^\circ$

   $\cos 36,8^\circ = \dfrac{QR\ (\text{sisi samping})}{QP\ (\text{sisi miring/hipotenusa})}$

   jadi jawabannya adalah ii. $\cos 36,8^\circ$

2.

3.

4. Contoh jawaban yang tepat:
   Sinus adalah nilai perbandingan sisi depan dan sisi miring suatu sudut pada segitiga siku-siku. Nilai sinus ditentukan oleh besaran sudut dan dapat diterapkan pada segitiga siku-siku dengan ukuran berbeda-beda

5. Contoh jawaban yang tepat:
   Cosinus adalah nilai perbandingan sisi samping dan sisi miring suatu sudut pada segitiga siku-siku. Nilai cosinus ditentukan oleh besaran sudut dan dapat diterapkan pada segitiga siku-siku dengan ukuran berbeda-beda.

Kunci Jawaban Latihan 4.6

1. $4\sqrt{2}$ cm
   Jawaban Ayo Mandiri: $5\sqrt{2}$ cm

2. a. Contoh jawaban yang tepat: 6 cm, 3 cm, $3\sqrt{3}$ cm
   b. Tidak mungkin. Perbandingan salah satu sisi segitiga dengan sisi miringnya harus setengahnya, sedangkan 5 cm bukan setengah dari 15 cm

Kunci Jawaban Latihan 4.7

Soal Pemahanan

1. z = 18,4 dan x = 15,94

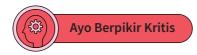
2. a. Sisi depan = sisi CB, sisi samping = sisi CA, sisi miring = sisi AB
   b. $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$

c. $\cos\theta = \dfrac{5}{13}$

Soal Aplikasi

3. a.

Sin 56,3° = $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ atau 0.83	Sin 33,7° = $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ atau 0.55
Cos 56,3° = $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ atau 0.55	Cos 33,7° = $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ atau 0.83

b. Sin 56,3° sama dengan cos 33,7°. Kemudian, sin 33,7° sama dengan cos 56,3°. Hal ini terjadi karena kedua sudut lancip pada segitiga siku-siku terletak berseberangan sehingga sisi depan salah satu sudut lancipnya sama dengan sisi samping sudut lancip yang satunya.

setelah siswa selesai mencoba mencari pola secara mandiri atau dengan bekerja sama, guru menjelaskan bahwa sudut komplementer akan memiliki nilai sinus dan cosinus yang sama.

4. $x = 4,\ y = 4\sqrt{3},\ z = 2\sqrt{6}$
5. Tinggi gedung $= 40\sqrt{3}$ meter

Soal Penalaran

6. a. Saya tidak setuju. Mencari sin 30° tidak akan menolong Desi untuk menemukan panjang x. Panjang sisi yang perlu diketahui adalah sisi samping 30°, maka yang lebih bermanfaat adalah mencari cos 30°.

   b. $x = 1$

7. Pada dasarnya siswa harus menggambar dua segitiga siku-siku yang membentuk persegi dengan dua sudut lancip istimewa yaitu 30° dan 60°.

   Dengan merujuk ke tabel sudut istimewa perbandingan trigonometri, persamaan untuk mencari panjang persegi panjang adalah

   Lebar persegi dibagi dengan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

8. Dua nilai yang harus dicari siswa adalah jarak antara laki-laki dan tiang serta jarak antara pohon dan tiang. Kemudian, siswa dapat melakukan operasi pengurangan

untuk menemukan jarak antara laki-laki dan pohon.

Jarak antara laki-laki dengan tiang adalah 50 m (karena tan 45° = 1).

Jarak antara pohon dan tiang dapat dicari dengan menggunakan nilai perbandingan trigonometri tan 60°.

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{50 \text{ meter}}{x}$$
$$x = 28,87 \text{ meter}$$

Jarak antara laki-laki dan pohon = 50 meter – 28,87 meter = 21,13 meter.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. $\sin x = \dfrac{21}{29}$ dan $\tan x = \dfrac{21}{20}$
2. Panjang sisi persegi $= 9\sqrt{2}$
3. Supaya tangga berada tepat di luar jendela lantai 3, ketinggian tangga harus pada 6.4 meter (tinggi dua lantai). Untuk mencari panjang tangga, siswa perlu menggunakan nilai perbandingan trigonometri sin 75°.

   $$0,96 = \frac{6,4 \text{ meter}}{x}$$
   $$x = 6,67 \text{ meter}$$ Jadi, panjang tangga harus sekitar 6,67 meter.
4. Perkataan Tomi benar. Sisi depan pada sin A sama dengan sisi samping pada cos B. Selain itu, sisi miring segitiga tetap sama pada kedua nilai perbandingan yaitu panjang sisi BA. Oleh karena kesamaan sisi yang dirujuk inilah kita dapat menyimpulkan cos B = sin A.
5. a. Berdiri di depan tugu Jam Gadang dengan membawa clinometer sederhana. Hitung sudut elevasinya. Hitung juga jarak antara pengukur dan tugu Jam Gadang. Jangan lupa catat tinggi pengukurnya yang perlu ditambahkan untuk menemukan hasil akhir yang akurat. Dengan menggunakan nilai perbandingan tangen sudut elevasi dan menambahkan tinggi badan pengukur, ia akan menemukan tinggi Jam Gadang.

b. Cari sebuah titik di seberang sungai yang mencolok dan bisa dijadikan objek rujukan. Posisikan diri tepat di seberang objek rujukan dan jalan sambil mengukur jarak yang ditempuh. Berhenti di suatu titik yang diingini dan gunakan alat busur untuk menghitung sudut perputaran agar pengukur dapat menatap objek rujukannya. Dengan menggunakan nilai perbandingan tangen, pengukur dapat menemukan lebar sungai dan menentukan panjang jembatan yang perlu dibangun.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab 5

Panduan Khusus

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan dapat:

1. memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear dan menyelesaikannya; serta
2. memodelkan masalah ke dalam sistem pertidaksamaan linear dan menyelesaikannya.

Bab Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear bertujuan untuk mengembangkan kemampuan siswa agar dapat memahami dan bernalar mengenai sistem persamaan dan pertidaksamaan linear. Siswa akan dapat memodelkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan dan pertidaksamaan linear serta menyelesaikannya. Mereka membangun pemahaman berdasarkan sistem persamaan linear dengan dua variabel yang sudah dipelajari di SMP.

Pada subbab A dibahas sistem persamaan linear dengan tiga variabel. Untuk penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks akan dibahas di kelas selanjutnya saat mempelajari matriks. Pada subbab B dibahas sistem pertidaksamaan linear dua variabel, namun tidak membahas program linear yang tidak termuat dalam Capaian Pembelajaran.

Pemahaman sistem persamaan dan pertidaksamaan linear dalam bab ini terkait dengan mencari persamaan kurva pada sistem koordinat, matriks, dan program linear. Bab ini juga terkait dengan mata pelajaran Fisika dan Ekonomi.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas
A. Sistem Persamaan Linear	4	Memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear dan menyelesaikannya.	Sistem Persamaan Linear	Persamaan, linear, sistem, solusi	Eksplorasi, pemaparan, latihan, pemanfaatan teknologi (opsional)
B. Sistem Pertidaksamaan Linear	4	Memodelkan masalah ke dalam sistem pertidaksamaan linear dan menyelesaikannya.	Sistem Pertidaksamaan Linear	Pertidaksamaan, linear, sistem, daerah hasil	Eksplorasi, pemaparan, latihan, pemanfaatan teknologi (opsional)

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Sistem Persamaan Linear

Memodelkan masalah ke dalam Sistem Persamaan Linear dan menyelesaikannya.

- Buku berpetak untuk menggambar grafik sistem koordinat.
- Lebih baik jika bisa memanfaatkan teknologi informasi seperti aplikasi *GeoGebra* dan *Desmos*.

Ingatkan siswa tentang materi sistem persamaan linear dengan dua variabel yang telah mereka pelajari di SMP.

Perkenalkan bab ini dengan contoh-contoh permasalahan yang dapat diselesaikan dengan sistem persamaan linear dan meminta siswa menyebutkan contoh-contoh lain yang ada di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan dua pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap dua pertanyaan ini selama pembelajaran mengenai sistem persamaan linear.

Gunakan bagian **Mengingat Kembali** mengenai sistem persamaan linear dengan dua variabel yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa.

- Apa yang dimaksud dengan sistem persamaan linear?
- Bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear?
- Bagaimana menentukan variabel?
- Apakah semua sistem persamaan linear memiliki solusi?
- Bagaimana menggambar grafik sistem persamaan linear?

Mulai aktivitas pembelajaran dengan membahas perolehan nilai dalam

bola basket. Minta siswa melakukan Eksplorasi 5.1. Siswa dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu selanjutnya diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

Eksplorasi 5.1

1. Untuk strategi coba dan perbaiki, dorong siswa untuk berani mencoba, kalau salah, perbaiki tebakan. Ulangi sampai mendapat hasil yang sesuai. Berikut ini contoh tabel yang sudah diisi.

1 angka	2 angka	3 angka	nilai
6	5	5	31
6	6	4	30
6	7	3	29
6	8	2	28
6	9	1	27

2. Mungkin ada siswa yang menyadari bahwa ini adalah sistem persamaan linear dua variabel (dengan substitusi nilai $a = 6$)

   Jika b menyatakan banyaknya lemparan bernilai 2 angka

   dan c menyatakan banyaknya lemparan bernilai 3 angka

   maka

$$\begin{cases} 2b + 3c = 21 \\ b + c = 10 \end{cases}$$

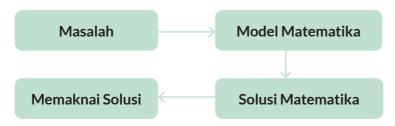
   Sistem persamaan linear tersebut dapat diselesaikan dengan metode eliminasi maupun substitusi untuk mendapatkan nilai $b = 9$ dan $c = 1$.

3.

   Metode berbeda menghasilkan jawaban yang sama karena permasalahannya memang sama.

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tampung semua usul dan uji apakah memenuhi permasalahan yang diberikan.

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan prapengetahuan tentang sistem persamaan linear dengan dua variabel. Bahaslah penyelesaian permasalahan tersebut dengan sistem persamaan linear tiga variabel.

1. Membuat model matematika. Teknologi dapat memudahkan manusia untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, namun proses membuat model matematika harus dilakukan oleh manusia. Dipastikan bahwa siswa mampu melakukan hal sebagai berikut.
    a. Menentukan variabel.
    b. Membuat model matematika.
    c. Menentukan apakah model matematika tersebut merupakan sistem persamaan linear.
2. Menyelesaikan sistem persamaan linear. Ingatkan siswa dengan metode eliminasi dan substitusi yang pernah dipelajari saat belajar sistem persamaan linear dengan dua variabel. Perbedaannya adalah dibutuhkan eliminasi dan substitusi yang lebih sering.
3. Setelah mendapatkan solusi, siswa perlu menjelaskan makna solusi ini dalam konteks permasalahan yang ada.

4. Ayo Berpikir Kritis

    Dibutuhkan 3 persamaan untuk membentuk sistem persamaan linear dengan 3 variabel. (Demikian pula dibutuhkan 4 persamaan untuk membentuk sistem persamaan linear dengan 4 variabel).

Mintalah siswa mengerjakan Latihan 5.1 nomor 1 untuk memeriksa pemahaman mereka.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan, pertanyaan-pertanyaan ini dapat digunakan untuk menuntun.

1. Pemilihan variabel. Ajak siswa memikirkan bagaimana menentukan variabel yang digunakan. Ajak siswa berpikir tentang:
    - Apa yang diketahui?
    - Apa yang ditanya?
    - Jika saya memilih [suatu hal] sebagai variabel, apakah informasi-informasi yang ada dapat dituliskan model matematikanya?
    - Apakah hal yang ditanyakan dapat dinyatakan dalam variabel yang ada?
2. Menentukan model matematika. Ajak siswa untuk 'menerjemahkan' informasi dalam soal menjadi persamaan-persamaan matematika. Bisa jadi ada siswa yang kurang tepat memilih variabel sehingga tidak dapat membuat persamaan-persamaan matematika. Ajak siswa untuk meninjau ulang variabel yang dipilih.
3. Ajak siswa untuk menguji apakah persamaan-persamaan yang ada merupakan sistem persamaan linear. Linear artinya semua variabel berpangkat 1. Persamaan artinya semua kalimat matematika memuat tanda =. Sistem artinya semua persamaan serentak atau simultan sehingga solusi harus memenuhi semua persamaan.
4. Bahaslah mengenai metode eliminasi dan substitusi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear. Alternatif penyelesaian yang ditampilkan pada Buku Siswa ditampilkan dengan metode substitusi.

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), mereka diminta untuk memikirkan apakah setiap sistem persamaan linear memiliki jawaban? Bagaimana membedakannya?

Kunci Jawaban Latihan 5.1

1. Pada soal sudah ada 3 variabel $a,\ b,\ c$ dan inilah yang akan digunakan.

   a. $3a + 2b + c = 390$

   b. $$\begin{cases} 3a + 2b + c = 390 \\ a + 3b + 2c = 460 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$$

   c. Sistem persamaan linear, 3 persamaan dengan 3 variabel yang semua variabelnya berpangkat 1.

   $$\begin{array}{rcl|c|rcl} 3a + 2b + c &=& 390 & \times 3 & 9a + 6b + 3c &=& 1170 \\ a + 3b + 2c &=& 460 & \times 2 & 2a + 6b + 4c &=& 920 \\ \hline & & & & 7a - c &=& 250 \end{array}$$

   d. $$\begin{array}{rcl} 7a - c &=& 250 \\ 2a - c &=& 0 \\ \hline 5a &=& 250 \\ a &=& 50 \end{array}$$

   $$\begin{aligned} 2a - c &= 0 \\ c &= 2a \\ c &= 100 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 390 \\ 150 + 2b + 100 &= 390 \\ 2b &= 140 \\ b &= 70 \end{aligned}$$

   e. Ada 1 (set) solusi yaitu $a = 50, b = 70, c = 100$

   f. Tongkat a panjangnya 50 cm, tongkat b panjangnya 70 cm, tongkat c panjangnya 100 cm.

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Jelaskan tentang banyaknya solusi pada sistem persamaan linear. Sebagaimana dua buah garis memiliki tiga kemungkinan, demikian juga solusi sistem persamaan linear dengan dua variabel:

- Dua garis berpotongan di satu titik. Sistem persamaan linear yang grafiknya berupa dua garis berpotongan memiliki satu solusi, yaitu pasangan bilangan (sama dengan koordinat titik potong garis).

- Dua garis sejajar (tidak pernah berpotongan). Sistem persamaan linear yang grafiknya berupa dua garis sejajar tidak memiliki solusi.
- Dua garis berimpit. Sistem persamaan linear yang grafiknya berupa dua garis berimpit memiliki banyak solusi, yaitu semua pasangan bilangan yang memenuhi persamaan garis (koordinat semua titik pada garis).

Sebagaimana pada sistem persamaan linear dengan dua variabel ada 3 kemungkinan banyaknya (pasangan) jawaban, demikian juga pada sistem persamaan linear dengan tiga variabel ada 3 kemungkinan banyaknya (set) jawaban. Hanya saja representasi grafiknya lebih sulit karena membutuhkan grafik tiga dimensi. Untuk memahami lebih lanjut mengenai banyaknya solusi yang berbeda-beda itu, ajak siswa untuk mengamati bahwa Latihan 1 yang sudah mereka kerjakan adalah contoh

Kunci Jawaban Latihan 5.1

2. Jika digunakan variabel k volume kemasan kecil, s volume kemasan sedang, dan b volume kemasan besar (semua volume dalam ml).

   a. Sistem persamaannya

   $$\begin{cases} 3k + 2s + 3b = 4700 \\ 3k + s + 2b = 3300 \\ 2s + 2b = 2800 \end{cases}$$

   b. Semua variabel pada sistem persamaan tersebut berpangkat satu, maka sistem persamaan tersebut adalah sistem persamaan linear.

   c. Eliminasi persamaan pertama dan persamaan kedua.

   $$\begin{array}{rcrcrcr} 3k & + & 2s & + & 3b & = & 4700 \\ 3k & + & s & + & 2b & = & 3300 \\ \hline & & s & + & b & = & 1400 \end{array}$$

   Persamaan yang dihasilkan adalah persamaan yang sama dengan persamaan ketiga dalam sistem persamaan linear (seluruh persamaan dikalikan 2).

   d. Proses pada (c) menghasilkan persamaan yang sama dengan persamaan ketiga (grafiknya berupa dua garis berimpit), maka sistem persamaan linear ini memiliki **banyak solusi.**

e. Ada banyak kemungkinan volume kemasan kecil, sedang, dan besar, contohnya $k = 366,66$, $s = 600$, $b = 800$ adalah solusi, $k = 333,33$, $s = 500$, $b = 900$ juga solusi.

3. Jika j adalah harga tiap kg jeruk, p adalah harga tiap kg pepaya, dan s adalah harga tiap kg salak (semua harga dalam ribu rupiah), maka sistem persamaannya adalah:

   a. $$\begin{cases} 3j + 3p + s = 130 \\ 2j + 2p + s = 100 \\ j + p = 50 \end{cases}$$

   b. Sistem persamaan linear karena semua variabelnya berpangkat satu.

   c. Eliminasi persamaan pertama dan kedua diperoleh:

   $$\begin{array}{rcrcrcr} 3j & + & 3p & + & s & = & 130 \\ 2j & + & 2p & + & s & = & 100 \\ \hline j & + & p & & & = & 30 \end{array}$$

   Bandingkan persamaan ini dengan persamaan ketiga.

   d. Grafiknya berupa dua garis yang sejajar, maka sistem persamaan linear ini adalah sistem persamaan linear yang **tidak memiliki solusi.**

   e. Harga buah-buahan di setiap paket berbeda-beda.

Diferensiasi

Jika ada siswa yang levelnya *advanced* ingin mencoba memvisualkan hal ini, arahkan untuk bereksplorasi dengan memanfaatkan teknologi (kalkulator grafik/aplikasi) untuk menggambar grafik. Pada jenjang lebih tinggi, banyaknya solusi diselidiki dengan menguji rank matriks yang bersesuaian.

Ayo Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi

1. 3
2. Jika dalam proses eliminasi dan substitusi siswa mendapati persamaan yang ruas kiri identik namun ruas kanan berbeda.

3. Jika dalam proses eliminasi dan substitusi siswa mendapati persamaan yang ruas kiri identik dan ruas kanan juga identik.

Sebagai PR, minta siswa mengerjakan Latihan 1 no. 4-8.

Kunci Jawaban Latihan 5.1

4. a. Bukan sistem persamaan linear, ada variabel x^2
   a. Bukan sistem persamaan linear, ada variabel x^2, y^2, z^2
   b. Sistem Persamaan Linear, semua variabel berpangkat 1.
   c. Bukan Sistem Persamaan Linear, ada variabel $\frac{1}{z}$
   d. Sistem Persamaan Linear, semua variabel berpangkat 1.
5. Jika a adalah harga 1 kg beras A, b harga 1 kg beras B, dan c adalah harga 1 kg beras C, maka
   a. $$\begin{cases} 2a + 2b + c = 50 \\ 4a + 2b + 3c = 91 \\ 4a + 4b + 2c = 95 \end{cases}$$
   b. Sistem persamaan linear karena semua variabelnya berpangkat satu.
   c. $$\begin{array}{lcl} 2a + 2b + c = 50 & |\times 2| & 4a + 4b + 2c = 100 \\ 4a + 4b + 2c = 95 & |\times 1| & 4a + 4b + 2c = 95 \\ \hline \end{array}$$
   Perhatikan bahwa ruas kiri kedua persamaan sama sedangkan ruas kanannya berbeda. Ini adalah ciri sistem persamaan linear yang tidak memiliki solusi.
6. Jika a menyatakan harga tiket anak, d menyatakan harga tiket dewasa, dan l harga tiket lansia (semuanya dalam ribu rupiah), maka sistem persamaannya menjadi:
   $$\begin{cases} 4a + 2d + l = 640 \\ a + 3d + 2l = 550 \\ 3a + d + l = 450 \end{cases}$$
   Ini adalah sistem persamaan linear yang solusinya $a = 90, d = 100, l = 80$. Harga tiket anak-anak adalah Rp90.000,00, harga tiket dewasa adalah Rp100.000,00, dan harga tiket lansia adalah Rp80.000,00.
7. Jika b menyatakan berat sebuah bola basket, k berat sebuah bola kaki, dan v berat sebuah bola voli, maka model matematikanya adalah sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 2b + k + 3v = 2500 \\ b + 2k + 2v = 2050 \\ 2b + v = 1550 \end{cases}$$

yang solusinya adalah $b = 650, k = 450, v = 250$

8. Jika j untuk menyatakan berat sebuah jeruk, m untuk menyatakan berat sebuah mangga, dan s untuk menyatakan berat sebuah salak maka masalah tersebut dapat dimodelkan ke dalam sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} m + 5j + 8s = 1,5 \\ 2m + 10j + 4s = 2 \\ 3m + 12s = 2 \end{cases}$$

yang solusinya adalah $j = \frac{1}{10}, m = \frac{1}{3}, s = \frac{1}{12}$

Solusi yang didapatkan perlu dikembalikan ke permasalahan nyata. Sesuai definisi setiap variabel, sebuah jeruk beratnya 0,1 kg, sebuah mangga beratnya $\frac{1}{3}$ kg, dan setiap salak beratnya $\frac{1}{12}$ kg.

B. Sistem Pertidaksamaan Linear

Pengalaman Belajar

- Memodelkan masalah ke dalam Sistem Pertidaksamaan Linear dan menyelesaikannya.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Buku berpetak untuk menggambar grafik sistem koordinat.
- Lebih baik jika bisa memanfaatkan teknologi informasi seperti aplikasi *GeoGebra* dan *Desmos*.

Apersepsi

Ingatkan siswa tentang materi pertidaksamaan linear yang telah mereka pelajari di SMP. Ajak mereka berpikir bahwa jika beberapa persamaan linear dapat membentuk

sistem persamaan linear, dapatkah beberapa pertidaksamaan linear membentuk sistem pertidaksamaan linear?

Mulai aktivitas pembelajaran dengan membahas timbangan dua lengan. Mungkin siswa mengenali ini sebagai timbangan yang biasa digunakan di pasar. Minta siswa melakukan Eksplorasi 5.2.

Eksplorasi 5.2

Jika di sekolah ada timbangan dua lengan (mungkin milik Laboratorium Fisika), dapat dibawa ke kelas. Alternatifnya, dapat ditunjukkan gambar timbangan dua lengan dan jelaskan cara kerjanya.

1. Untuk strategi coba dan perbaiki, dorong siswa untuk berani mencoba. Jika hasilnya salah, perbaiki tebakan, ulangi sampai mendapatkan hasil yang sesuai. Berikut ini contoh tabel yang sudah diisi. Perhatikan bahwa ada lebih dari 1 (set) kemungkinan jawaban.

Berat 1 apel	**Berat 1 jeruk**	**Berat 2 apel dan 5 jeruk**	**Berat 6 apel dan 2 jeruk**
1	1	7	8
2	1	9	14
3	$\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	19

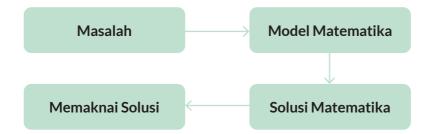
Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tampung semua usul dan uji apakah memenuhi permasalahan yang diberikan.

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan prapengetahuan tentang sistem persamaan linear dengan dua variabel. Tantang siswa untuk membuat model matematikanya. Perhatikan tanda ketidaksamaan yang siswa gunakan. Apakah tepat?

Bandingkan dengan model matematika yang dituliskan pada buku siswa.

Tunjukkan bahwa model matematika tersebut adalah sistem pertidaksamaan linear. (Linear: semua variabelnya berpangkat 1, pertidaksamaan: kedua ruas terhubung dengan tanda ketidaksamaan (dapat berupa tanda “≠”, “<”, atau “>”), sistem: semua pertidaksamaan serentak atau simultan, sehingga solusi memenuhi semua pertidaksamaan)

Ingatkan siswa akan proses berpikir

1. Membuat model matematika. Teknologi dapat memudahkan manusia untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, namun proses membuat model matematika harus dilakukan oleh manusia. Dipastikan siswa mampu melakukan hal sebagai berikut.
    a. Menentukan variabel.
    b. Membuat model matematika.
    c. Menentukan apakah model matematika tersebut merupakan sistem pertidaksamaan linear.
2. Menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear
    a. Menyelesaikan sistem persamaan linear dan menggambar grafiknya.
    b. Menentukan daerah hasil masing-masing pertidaksamaan.
    c. Menentukan daerah yang merupakan irisan dari semua daerah hasil. Inilah daerah hasil sistem pertidaksamaan linear.
3. Setelah mendapatkan solusi, siswa perlu menjelaskan makna solusi ini dalam konteks permasalahan yang ada.

Ayo Berpikir:

a. Ya
b. Tidak

Pada Eksplorasi 5.2, penekanannya adalah siswa dapat membuat sistem pertidaksamaan linear (penyelesaian hanya merupakan hasil tebak dan perbaiki). Pada Eksplorasi 5.3 diharapkan siswa dapat melangkah lebih jauh dengan menentukan daerah hasil sistem pertidaksamaan linear. Bahaslah Eksplorasi 5.3 dan tuntun siswa untuk menggambar grafik dan menentukan daerah hasil. Uji beberapa titik pada daerah hasil dan ajak siswa melihat bahwa semua titik pada daerah hasil memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Beberapa contoh jawaban yang mungkin:

- (14,5) artinya 14 perlombaan dan 5 peserta
- (20,1) artinya 20 perlombaan dan 1 peserta

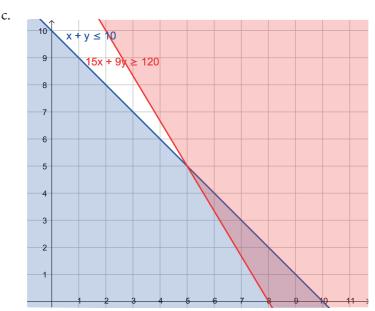
Kunci Jawaban Latihan 5.2

1. Jika x adalah lamanya Bonar bekerja mengantar barang dan y adalah lamanya Bonar bekerja mencuci piring, maka

   a. Model matematikanya adalah

   $$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 15x + 9y \geq 120 \end{cases}$$

   b. Sistem pertidaksamaan linear. Semua variabelnya berpangkat 1.

   c.

d. Berpotongan di (5,5)

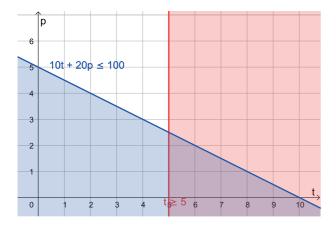
e. Daerah yang berwarna ungu pada grafik

f. Tidak. Tidak ada daerah dengan koordinat $(4,y)$ pada daerah hasil (berwarna ungu).

g. Ya, titik (9,1) terletak pada daerah hasil (berwarna ungu). Bonar bisa bekerja selama 9 jam sebagai pengantar barang dan 1 jam sebagai pencuci piring untuk mendapatkan uang yang dibutuhkan.

2. Jika t adalah banyaknya tanaman yang dibeli dan p adalah banyaknya pupuk yang dibeli, maka sistem pertidaksamaan linearnya adalah

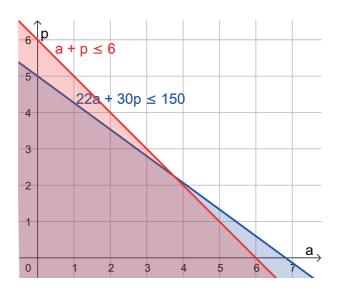
$$\begin{cases} 10t + 20p \leq 100 \\ t \geq 5 \end{cases}$$

dan grafiknya ditunjukkan oleh

Ada beberapa kemungkinan yang dapat dipilih Nova, contohnya:

- (6,1) artinya 6 kantong pupuk dan 1 tanaman
- (5,2) artinya 5 kantong pupuk dan 2 tanaman

3. Jika a adalah berat telur ayam dan p adalah berat telur puyuh yang dibeli, maka

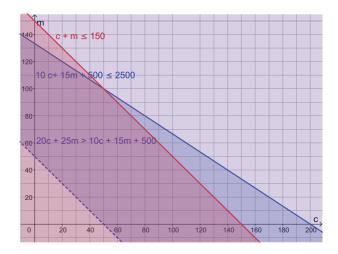
$$\begin{cases} 22a + 30p \leq 150 \\ a + p \leq 6 \end{cases}$$

dan grafiknya ditunjukkan oleh

Ada beberapa kemungkinan yang dapat dipilih, contohnya:

- (1,3) artinya 1 kg telur ayam dan 1 kg telur puyuh
- (4,2) artinya 4 kg telur ayam dan 2 kg telur puyuh

4. Jika c adalah banyaknya sabun cuci dan m adalah banyaknya sabun mandi. Keuntungan didapatkan jika pendapatan lebih besar dari pengeluaran. Sistem pertidaksamaan linearnya:

$$\begin{cases} 10c + 15m + 500 \leq 2500 \\ c + m \leq 150 \\ 20c + 25m > 10c + 15m + 500 \end{cases}$$

dan grafiknya ditunjukkan oleh

UMKM tersebut bisa mendapat keuntungan, salah satunya jika membuat 80 liter sabun cuci dan 40 liter sabun mandi.

Refleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi

1. 2
2. Jika hanya ada satu pertidaksamaan, maka bukan sistem pertidaksamaan. Jika ada lebih dari dua pertidaksamaan, daerah hasilnya merupakan irisan dari lebih banyak pertidaksamaan (bisa tetap berupa sistem pertidaksamaan linear).

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. Jika b menyatakan harga sebuah buku tulis, p menyatakan harga sebuah pena, dan menyatakan harga sebuah penghapus, maka model matematikanya adalah sistem persamaan linear

Toko A	Toko B
$\begin{cases} 8b + 4p + 3s = 62 \\ 5b + 8p = 57 \\ 3b + s = 17 \end{cases}$	$\begin{cases} 5b + 4p + 2s = 48 \\ 8b + 12p = 90 \\ 5b + 8p + 3s = 64 \end{cases}$
$b = 5, p = 4, s = 2$	$b = 6, p = \frac{7}{2}, 8 = 2$
Harga buku Rp5.000,00 Harga pena Rp4.000,00 Harga penghapus Rp2.000,00	Harga buku Rp6.000,00 Harga pena Rp3.500,00 Harga penghapus Rp2.000,00

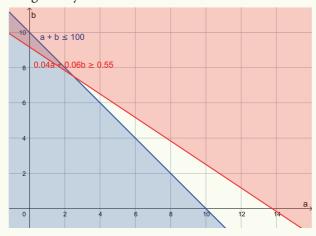
a. Toko B

b. Harganya sama

c. Toko A

2. Jika a dan b adalah banyaknya uang yang didepositokan di Bank A dan Bank B secara berturut-turut, maka sistem pertidaksamaan linear yang dibentuk (dalam satuan juta rupiah) adalah

$$\begin{cases} a + b \leq 100 \\ 0,04a + 0,06b \geq 0,55 \end{cases}$$

dan grafiknya adalah

Ya, salah satu kemungkinannya adalah (1,9) yaitu mendepositokan Rp10.000.000,00 di Bank A dan Rp90.000.000,00 di Bank B.

Pengayaan

Proyek ini bersifat opsional dan dapat diberikan sebagai tugas tambahan.

1. Perhatikan sampul bab ini. Tentukan harga tiap jenis makanan/minuman.
2. Pergilah ke warung/restoran yang menjual makanan secara paket. Pilihlah paket-paket yang dapat dinyatakan sebagai sistem persamaan linear, kemudian tentukan harga setiap jenis makanan/minumannya.

Kunci Jawaban

Pengayaan

1. Jika x menyatakan harga tiap porsi burger, y menyatakan harga tiap porsi kentang, dan z menyatakan harga tiap gelas soda, maka sistem persamaan linearnya adalah

$$\begin{cases} x + y + z = 34 \\ 2x + 2y + z = 58 \\ 3x + y + 2z = 74 \end{cases}$$

dan solusinya adalah

$x = 15, y = 9, z = 10$

Tiap porsi burger berharga Rp15.000,00, harga tiap porsi kentang Rp9.000,00, dan tiap gelas soda berharga Rp10.000,00.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab 6

Panduan Khusus

Fungsi Kuadrat

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan dapat:

1. mengidentifikasi fungsi kuadrat dalam bentuk aljabar, tabel nilai, dan grafik
2. menemukan karakteristik dari fungsi kuadrat
3. menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari dengan cara aljabar maupun grafik

Bab Fungsi Kuadrat bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai fungsi kuadrat. Siswa akan memahami karakteristik fungsi kuadrat yang ditunjukkan oleh grafiknya yang berbentuk parabola. Karakteristik fungsi kuadrat ditunjukkan oleh konstanta-konstanta dalam $f(x) = ax^2 + bx + c$. Konstanta-konstanta ini menentukan bentuk parabolanya, apakah terbuka ke atas atau ke bawah, apakah lebar atau sempit dan titik potong dengan sumbu-y. Semua parabola simetri terhadap suatu garis, disebut sebagai sumbu simetri. Titik puncak selalu melalui sumbu simetri. Selain titik puncak, sumbu simetri, titik potong dengan sumbu-y, titik potong dengan sumbu-x merupakan hal-hal mendasar dalam memahami fungsi kuadrat. Titik potong dengan sumbu -x berkaitan dengan akar-akar persamaan kuadrat. Selanjutnya, siswa akan mengonstruksi fungsi kuadrat berdasarkan informasi yang diperoleh bahkan siswa dapat mengubah dari satu bentuk fungsi kuadrat ke bentuk yang lain. Tiga cara untuk menyatakan fungsi kuadrat dibahas dalam bab ini. Siswa akan menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah sehari-hari. Fenomena kejadian alam bahkan ekonomi dapat dijelaskan dengan fungsi kuadrat.

Pada subbab A, siswa melakukan beberapa eksplorasi untuk menentukan karakteristik fungsi kuadrat dengan menggambar grafik. Pada subbab B, siswa melakukan beberapa eksplorasi untuk mengonstruksi fungsi kuadrat bahkan dapat mengubah dari satu bentuk ke bentuk lain. Pada subbab C, siswa melakukan eksplorasi untuk membangun model yang mendekati fungsi kuadrat dan model yang memang fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

Pemahaman fungsi kuadrat dalam bab ini berkaitan dengan fungsi eksponen sebagai perbandingan dan jumlah suku barisan aritmetika dalam barisan dan deret. Fungsi kuadrat dapat juga digunakan dalam bidang kimia seperti laju reaksi kimia dan kesetimbangan kimia. Fungsi kuadrat digunakan untuk menggambarkan gerak benda dipercepat atau diperlambat dalam bidang fisika. Hal lainnya adalah lintasan parabola untuk gerak peluru/parabola.

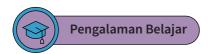
Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas
A. Karakteristik Fungsi Kuadrat	6	Menentukan karakteristik fungsi kuadrat	• Peran a dan c dalam fungsi kuadrat • Titik puncak • Titik potong dengan sumbu	• Diskriminan • Titik puncak	• Pembelajaran • Penemuan
B. Mengonstruksi Fungsi Kuadrat	6	Mengkonstruksi fungsi kuadrat dan mengubah dari satu bentuk ke bentuk lain	Tiga bentuk fungsi kuadrat	• Titik puncak • Akar-akar	• Pembelajaran • Penemuan
C. Menyelesaikan Masalah dengan Fungsi Kuadrat	4	Menyelesaikan masalah dengan fungsi kuadrat	• Model Fungsi Kuadrat	Model	• Pembelajaran • Penemuan

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Karakteristik Fungsi Kuadrat

Menentukan karakteristik fungsi kuadrat

Kertas berpetak

Perkenalkan bab ini dengan PEMBUKA BAB dan diskusikan contoh lintasan parabola selain lintasan bola basket dalam Gambar 6.1. Selain dalam olahraga, di mana saja ditemukan lintasan parabola, misalnya lintasan air mancur.

Tunjukkan grafik fungsi kuadrat (Gambar 6.2) dan minta siswa membandingkan dengan grafik garis lurus. Contoh perbedaan fungsi kuadrat dengan fungsi linear adalah kenaikan nilai fungsi berbanding lurus dengan kenaikan nilai x untuk fungsi linear. Pada fungsi kuadrat kenaikan nilai fungsi tidak berbanding lurus dengan nilai x. Fungsi kuadrat adalah fungsi polinom (suku banyak) dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2.

Gunakan bagian MENGINGAT KEMBALI mengenai persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP. Ada tiga cara penyelesaian persamaan kuadrat yaitu faktorisasi, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus (biasa disebut rumus abc). Persamaan kuadrat adalah bentuk nol dari fungsi kuadrat. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa.

- Pada kondisi apa persamaan kuadrat mempunyai dua akar real berbeda?
- Pada kondisi apa persamaan kuadrat mempunyai akar kembar?
- Pada kondisi apa persamaan kuadrat tidak mempunyai akar real?
- Untuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ bagaimana akar persamaan kuadrat jika $b = 0$ atau $c = 0$?

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta siswa memperhatikan gambar dalam Eksplorasi 6.1 (Gambar 6.3). Diskusikan hal yang menonjol dari gambar tersebut, yaitu perubahan jarak tidak sama untuk setiap detik. Tanyakan, apakah hal tersebut menunjukkan kecenderungan fungsi eksponen atau linear.

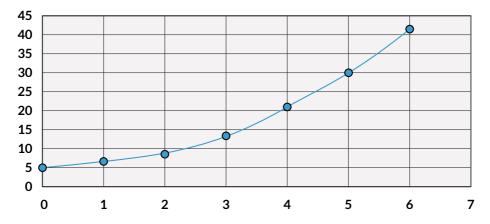
Setelah diskusi, minta siswa melakukan eksplorasi 6.1 yang ada dalam PERMASALAHAN. Selain kertas berpetak, mereka juga dapat menggunakan aplikasi *GeoGebra* atau *Microsoft Excel* untuk menggambar fungsi kuadrat.

Siswa melanjutkan Eksplorasi 6.2 dengan melengkapi tabel. Sebelumnya, mengukur dahulu jarak bola dengan penggaris untuk setiap waktu. Kemudian siswa menggambar grafik.

Siswa dapat melakukan kedua eksplorasi secara individu terlebih dahulu kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau dalam kelompok.

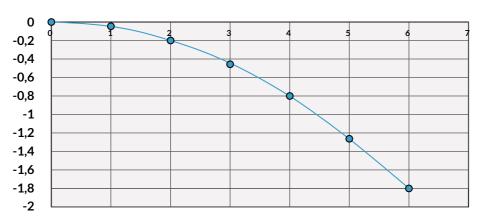
Jawaban Eksplorasi 6.1

Waktu (detik)	0	1	2	3	4	5	6
Posisi (m)	0	1	4	9	16	25	36

Jarak tempuh bertambah jika waktu bertambah tetapi pertambahan tidak sama untuk setiap detik.

Hasilnya menggambarkan bentuk parabola tidak utuh.

Jawaban Eksplorasi 6.2

Waktu (detik)	0	0,1	0,2	0,3	4	5	6
Posisi (m)	0	-0,05	-0,2	-0,45	-0,8	-1,25	-1,8

Posisi menggunakan tanda negatif karena gerak benda berada di bawah titik O.

Bentuk grafik merupakan parabola tidak utuh.

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan menunjukkan bahwa bentuk grafik adalah setengah parabola. Diskusikan perbedaan antara grafik dari Eksplorasi 6.1 dan Eksplorasi 6.2. Buat siswa paham bahwa ada fungsi kuadrat terbuka ke atas dan fungsi kuadrat terbuka ke bawah.

Bangkitkan keingintahuan siswa dengan bertanya, apa yang menyebabkan fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah? Untuk menjawab pertanyaan ini dan lainnya maka dilakukan eksplorasi-eksplorasi di bawah ini.

Buat kelompok siswa yang terdiri atas 5 orang. Setiap kelompok mengerjakan semua soal a-j sehingga setiap orang membuat dua grafik. Siswa dapat membuat grafik dengan menggunakan kalkulator atau aplikasi. Grafik-grafik tersebut selalu digunakan dalam eksplorasi sehingga perlu disimpan.

Jawaban Eksplorasi: Menggambar Grafik

(a) $f(x) = -x^2$

(b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

(c) $f(x) = -x^2 - x + 2$

(d) $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$

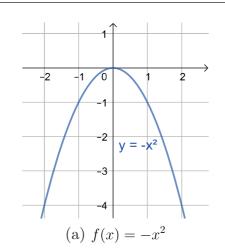
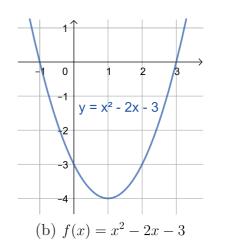
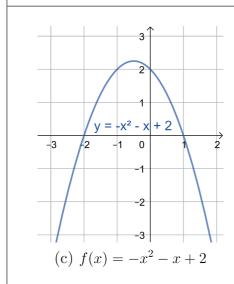
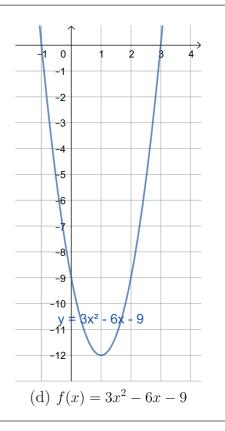
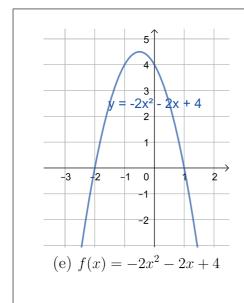
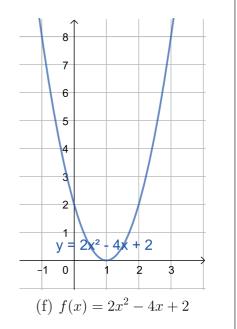
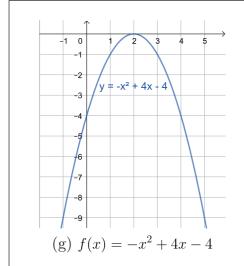
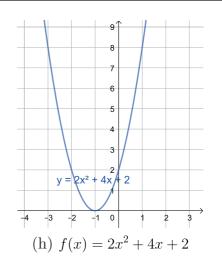
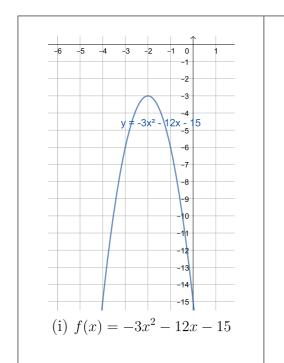
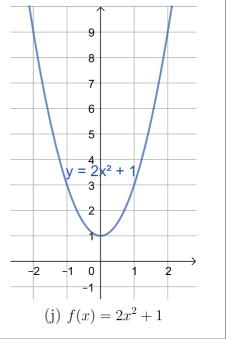
(e) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$

(f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

(g) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

(h) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

(i) $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$

(j) $f(x) = 2x^2 + 1$

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Cek pekerjaan setiap kelompok apakah grafik mereka sudah proporsional atau belum. Minta siswa mencermati sepuluh grafik yang telah dibuat dan mendaftarkan hal-hal istimewa yang mereka temui dalam grafik-grafik tersebut. Seiring dengan kegiatan eksplorasi yang mereka lakukan, mereka dapat mengecek daftar mereka dengan hasil eksplorasi. Eksplorasi 6.3 – 6.8 dilakukan dalam kelompok yang sama.

Jawaban Eksplorasi 6.3

1. $a > 0$ b,d,f,h,j, terbuka ke atas
2. $a < 0$ a,c,e,g,i terbuka ke bawah
3. Jika $a = 0$ maka fungsinya adalah $f(x) = bx + c$ yang merupakan fungsi linear

4.

$f(x) = ax^2 + bx + c$	grafik berbentuk
$a > 0$	$a > 0$
$a < 0$	$a < 0$

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Pastikan siswa memahami bahwa fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah ditentukan oleh nilai a. Uji pemahaman siswa dengan memberikan soal-soal lagi. Hubungkan nilai a dengan hasil Eksplorasi 6.1 dan 6.2. Tanyakan apa tanda dari a dalam Eksplorasi 6.1 dan 6.2? Jika mobil bergerak ke kanan dan diperlambat apa tanda dari a? Apakah grafiknya terbuka ke atas atau ke bawah? Diskusikan bahwa diperlambat artinya jarak berkurang jika waktu bertambah.

Eksplorasi 6.1 dan 6.2 hanya menghasilkan grafik setengah parabola karena waktu tidak dapat negatif.

Minta setiap kelompok melanjutkan eksplorasi 6.4 untuk menyelidiki peran c dalam fungsi kuadrat. Gunakan kembali grafik-grafik a-j.

Jawaban Eksplorasi 6.4

1.

Fungsi $y = ax^2 + bx + c$	Titik potong dengan sumbu Y	c
(a) $f(x) = -x^2$	(0,0)	0
(b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$	(0,-3)	3
(c) $f(x) = -x^2 - x + 2$	(0,2)	2
(d) $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$	(0,-9)	-9
(e) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$	(0,4)	4
(f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$	(0,2)	2
(g) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$	(0,-4)	-4
(h) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$	(0,2)	2
(i) $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$	(0,-15)	-15
(j) $f(x) = 2x^2 + 1$	(0,1)	1

2. c
3. $(0, c)$

Pastikan siswa memahami bahwa c menentukan titik potong fungsi kuadrat dengan sumbu y. Uji pemahaman siswa dengan memberikan soal-soal dan menanyakan koordinat titik potong fungsi kuadrat dengan sumbu y.

Kunci Jawaban Latihan 6.1

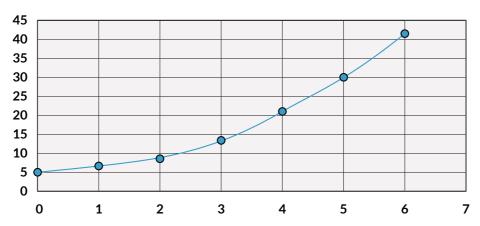
1. a. Jembatan A terbuka ke bawah dan jembatan bawah B terbuka ke atas
   b. Yang menentukan lebar sempitnya grafik fungsi kuadrat terbuka adalah nilai a.

   Untuk menjawab soal b ini minta siswa mengamati sepuluh grafik yang sudah dibuat.

2. a,d
3. b,c
4. Gambar pertama menunjukkan nilai $a = 0$ karena untuk selang waktu yang sama jarak tempuh sama besar.
5. Gambar kedua menunjukkan nilai $a > 0$ karena untuk selang waktu yang sama jarak tempuh makin besar (perhatikan hasil eksplorasi 1).
6. Gambar ketiga menunjukkan nilai $a < 0$ karena untuk selang waktu yang sama jarak tempuh makin kecil (perhatikan hasil eksplorasi 2).

Kunci Jawaban Latihan 6.2

1. Tabel Jarak Terhadap Waktu

Waktu (detik)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)	5	6	9	14	21	30	41

Hasilnya menggambarkan bentuk parabola.

Nilai c adalah 5.

2. Fungsi kuadrat terbuka ke bawah karena nilai fungsi naik kemudian turun lagi.
3. Fungsi kuadrat terbuka ke bawah karena nilai fungsi naik kemudian turun lagi.

Siswa diminta mengerjakan Eksplorasi 6.5 dalam kelompok dengan mengamati grafik-grafik yang ada terlebih dahulu. Tanyakan judul dari Eksplorasi 5 dan bagian-bagian mana dari grafik yang menunjukkan judul eksplorasi.

Jawaban Eksplorasi 6.5

Koordinat titik C adalah (2,3).
Ketinggian air maksimum adalah 6 panjang petak.

Koordinat titik A adalah (-60,20) karena jarak horizontal sama jauhnya dari titik (60,20).
Titik O merupakan titik minimum dari fungsi kuadrat.

Perhatikan bahwa jarak antara dua kabel adalah 6 m.
Koordinat titik A adalah (30,3).
Koordinat titik B adalah (0,16).
Koordinat titik C adalah (60,16).

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Jelaskan bahwa setiap fungsi kuadrat mempunyai titik minimum atau titik maksimum. Kedua titik ini dinamakan titik puncak atau vertex. Tanyakan apa hubungan antara titik puncak dengan fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah.

Tunjukkan Gambar 6.13 dan minta siswa menyebutkan apa saja karakteristik dari fungsi kuadrat. Diskusikan manfaat nilai maksimum dan nilai minimum dalam kehidupan sehari-hari, misalnya ketinggian maksimum atau biaya minimum atau luas maksimum. Diskusikan juga peran titik potong dengan sumbu x dalam kehidupan sehari-hari, misalnya waktu yang diperlukan agar bola mencapai tanah atau jumlah barang yang menyebabkan keuntungan nol.

Minta siswa mencermati petunjuk Eksplorasi 6.6 sebelum melakukan eksplorasi. Jelaskan bahwa $D = b^2 - 4ac$ merupakan pembeda akar-akar persamaan kuadrat. D adalah singkatan dari diskriminan.

Jawaban Eksplorasi 6.6

Fungsi $y = ax^2 + bx + c$	$D = b^2 - 4ac$	
(a) $f(x) = -x^2$	0	
(b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$	16	

(c) $f(x) = -x^2 - x + 2$	9	
(d) $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$	144	
(e) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$	36	
(f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$	0	
(g) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$	0	
(h) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$	0	
(i) $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$	-36	
(j) $f(x) = 2x^2 + 1$	-8	

1. $D > 0$ b, c, d, e memotong sumbu X di dua titik.
2. $D = 0$ a, f, g, h menyinggung sumbu X di satu titik.
3. $D < 0$ i, j tidak memotong (maupun menyinggung) sumbu X.
4.

Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$	Banyaknya akar $ax^2 + bx + c = 0$	banyaknya titik potong grafik dengan sumbu X
$D > 0$	2 berbeda	2
$D = 0$	2 kembar	1
$D < 0$	tidak ada akar real	0

Ayo Berpikir Kritis

1. Fungsi kuadrat yang $D < 0$ dan $a < 0$ grafiknya terbuka ke bawah dan tidak memotong (maupun menyinggung) sumbu X
2. Ya, nilai di bawah tanda akar. $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
3. Jika akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah p dan q maka titik potong

grafik fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu X adalah titik-titik $(p,0)$ dan $(q,0)$

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Uji pemahaman siswa tentang diskriminan dengan memberikan beberapa soal baik berupa grafik maupun bentuk fungsinya. Tanyakan apa manfaat belajar diskriminan dalam menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

Kunci Jawaban Latihan 6.3

1. a. dua
   b. dua
   c. dua
   d. Tidak ada
   e. satu
   f. dua
   g. dua
   h. dua
2.

Gambar	Titik Puncak	Sumbu simetri	Titik potong dengan sumbu -y	Titik potong dengan sumbu -x
Pertama	(1,4)	x = 1	(0,3)	Dua
Kedua	(0,2)	x = 0	(0,2)	Nol
Ketiga	(0,0)	x = 0	(0,0)	Satu

   a. Titik maksimum terjadi jika grafik terbuka ke bawah.
   b. Titik minimum terjadi jika grafik terbuka ke atas.

3. a. Jarak maksimum adalah 17 m.
   b. Koordinat titik maksimum (3,17).
   c. Sumbu simetri x = 3.

4. a. Biaya minimum adalah 400.
   b. Koordinat titik minimum adalah (20,400).
   c. Sumbu simetri x = 20

5.

   a. Biaya minimum maka grafik terbuka ke atas.
   b. Keuntungan maksimum maka grafik terbuka ke bawah.
   c. Kualitas bunyi maksimum maka grafik terbuka ke bawah.
   d. Efektivitas maksimum maka grafik terbuka ke bawah.
   e. Keselamatan maksimum maka grafik terbuka ke bawah.

Kunci Jawaban Latihan 6.4

1. Keuntungan maksimum terjadi pada x = 30 dan nilainya 71.460.
2. Ketinggian maksimum terjadi pada t = 1,1 detik dan bernilai 18,05 m.

Ayo Berefleksi

Untuk menjawab refleksi di bawah ini berikan satu contoh untuk setiap poin, dapat menggunakan contoh soal yang sama, sesuaikan dengan keadaan.

1. Apakah kalian dapat membuat grafik fungsi kuadrat jika diberikan tabel nilai?
2. Apakah kalian dapat membedakan fungsi kuadrat terbuka ke atas dengan terbuka ke bawah?
3. Apakah kalian dapat menjelaskan peran c dalam fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$?
4. Apakah kalian dapat menentukan titik puncak, sumbu simetri, titik potong dengan sumbu -y dan titik potong dengan sumbu-x?
5. Apakah kalian dapat membedakan titik maksimum dan titik minimum?
6. Apakah kalian dapat melihat hubungan antara diskriminan dengan banyak titik potong dengan sumbu -x.

B. Mengonstruksi Fungsi Kuadrat

Mengonstruksi fungsi kuadrat dan mengubah dari satu bentuk ke bentuk lainnya.

Kertas berpetak dan pisang

Jawaban Eksplorasi 6.7

Jawaban eksplorasi bergantung pada pemilihan pisang. Lengkungan pisang sebagai parabola. Tiga titik dipilih untuk mengonstruksi fungsi kuadrat. Ketiga titik adalah (0,0), (4,1) dan (-4,1).

Dari titik (0,0) maka $c = 0$

Dari titik (4,1) maka $1 = 16a + 4b$

Dari titik (-4,1) maka $1 = 16a - 4b$

Diperoleh $a = \frac{1}{16}$ dan $b = 0$

Fungsi kuadrat $f(x) = \frac{1}{16}x^2$

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Jelaskan bahwa jika tiga titik diketahui maka digunakan sistem persamaan linear tiga variabel untuk menentukan nilai a, b, dan c. Ada cara lain untuk mengonstruksi fungsi kuadrat yaitu dengan menggunakan titik puncak.

Jika menggunakan titik puncak maka untuk lengkungan pisang berlaku
$f(x) = ax^2$ karena $c = 0$ dan titik O melalui titik puncak.
Sehingga $1 = 16a$ dan $a = \frac{1}{16}$

Kelompok siswa menggunakan sepuluh grafik yang telah dibuat untuk melakukan eksplorasi 6.8.

Jawaban Eksplorasi 6.8

1. $D > 0$

Fungsi $y = ax^2 + bx + c$	D	p	q	
b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$	16	-1	3	$f(x) = (x+1)(x-3)$
c. $f(x) = -x^2 - x + 2$	9	-2	1	$f(x) = -(x+2)(x-1)$
d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$	144	-1	3	$f(x) = 3(x+1)(x-3)$
e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$	36	-2	1	$f(x) = -2(x+2)(x-1)$

$D = 0$

Fungsi $y = ax^2 + bx + c$	D	r	
a. $f(x) = -x^2$	0	0	$f(x) = -x^2$
f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$	0	1	$f(x) = 2(x-1)^2$
g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$	0	2	$f(x) = -(x-2)^2$
h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$	0	-1	$f(x) = 2(x+1)^2$

$D < 0$

Fungsi $y = ax^2 + bx + c$	D	
i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$	-36	
j. $f(x) = 2x^2 + 1$	8	

Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$	Bentuk faktor	Koordinat titik potong dengan sumbu X
$D > 0$	$y = a(x-p)(x-q)$	$(p,0)$ dan $(q,0)$
$D = 0$	$y = a(x-r)^2$	$(r,0)$
$D < 0$	–	–

2. a.

Fungsi $y = ax^2 + bx + c$	Sumbu simetri	
a. $f(x) = -x^2$	$x = 0$	$x = r$
b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$	$x = 1$	$x = \frac{p+q}{2}$
c. $f(x) = -x^2 - x + 2$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = \frac{p+q}{2}$
d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$	$x = 1$	$x = \frac{p+q}{2}$
e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = \frac{p+q}{2}$
f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$	$x = 1$	$x = r$
g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$	$x = 2$	$x = r$
h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$	$x = -1$	$x = r$
i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$	$x = -2$	
j. $f(x) = 2x^2 + 1$	$x = 0$	

b. Sumbu simetri

$x = \frac{p+q}{2}$

$x = r$

c. $x = -\frac{b}{2a}$ nilainya sama dengan sumbu simetri

d. Sumbu simetri dapat ditentukan berdasarkan titik potong grafik dengan sumbu -x dan dapat juga dengan memanfaatkan koefisien fungsi kuadrat.

3. a. Titik puncak

Fungsi $y = ax^2 + bx + c$	Titik puncak
a. $f(x) = -x^2$	(0,0)
b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$	(1,-4)
c. $f(x) = -x^2 - x + 2$	$\left(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$
d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$	(1,-12)
e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$	$\left(-\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$
f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$	(1,0)
g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$	(2,0)
h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$	(-1,0)
i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$	(-2,-3)
j. $f(x) = 2x^2 + 1$	(0,1)

b. Absis titik puncak = sumbu simetri
Substitusi nilai x = sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$ pada $f(x) = ax^2 + bx + c$ menghasilkan ordinat titik puncak

c. $\frac{D}{-4a}$ adalah ordinat titik puncak $y = \frac{D}{-4a}$

d. Koordinat titik puncak $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$

e. $h = -\dfrac{b}{2a}$ dan $k = \dfrac{D}{-4a}$

Nilai $(h, k) = \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{D}{-4a}\right)$ adalah koordinat titik puncak.

f. Ada berbagai cara untuk menentukan koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat:

i. Untuk fungsi kuadrat yang berbentuk $y = ax^2 + bx + c$, koordinat titik puncaknya adalah $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{D}{-4a}\right)$

ii. Untuk fungsi kuadrat yang berbentuk $y = a(x-h)^2 + k$ koordinat titik puncaknya adalah (h,k)

iii. Untuk fungsi kuadrat yang berbentuk $y = a(x-p)(x-q)$ absis titik puncaknya didapat dengan $x = \dfrac{p+q}{2}$ dan ordinat dengan substitusi nilai absis pada fungsi.

iv. Untuk fungsi kuadrat yang berbentuk $y = a(x-r)^2$ absis titik puncaknya didapat dengan $x = r$ dan ordinat dengan substitusi nilai absis pada fungsi.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Uji pemahaman siswa dengan memberikan lagi soal-soal apakah mereka sudah dapat mengonstruksi fungsi kuadrat atau mengubahnya dari satu bentuk ke bentuk yang lain.

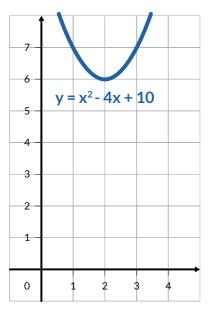
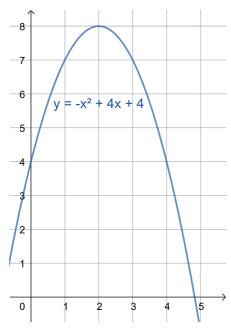
Kunci Jawaban Latihan 6.5

1. Titik puncak (2,6) maka bentuknya $f(x) = a(x-2)^2 + 6$

   Melalui (1,7) maka $7 = a(1-2)^2 + 6$

   $$f(x) = a(x-2)^2 + 6$$
   $$7 = a(1-2)^2 + 6$$
   $$a = 1$$

   Jadi $f(x) = a(x-2)^2 + 6$ atau $f(x) = x^2 - 4x + 10$

   Perhatikan grafiknya, fungsi ini tidak memotong sumbu X, jadi tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $f(x) = a(x-p)(x-q)$

2. Titik-titik yang dilalui (0,4) dan titik puncaknya (2,8).
   a. Titik puncak → $f(x) = a(x - 2)^2 + 8$
   b. Melalui (0,4) → $4 = a(4) + 8$ maka $a = -1$
   Fungsinya $f(x) = -(x - 2)^2 + 8$ atau $f(x) = -x^2 + 4x + 4$

3. a. $D > 0$
   b. $D > 0$

c. $D > 0$
d. $D > 0$
e. $D > 0$

Ayo Berefleksi

Untuk menjawab refleksi di bawah ini berikan satu contoh untuk setiap poin, dapat menggunakan contoh soal yang sama, sesuaikan dengan keadaan.

1. Apakah kalian dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui tiga titik dari fungsi kuadrat?
2. Apakah kalian dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui titik potong dengan sumbu x?
3. Apakah kalian dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui titik puncak?

C. Menyelesaikan Masalah dengan Fungsi Kuadrat

Pengalaman Belajar

Menyelesaikan masalah dengan fungsi kuadrat

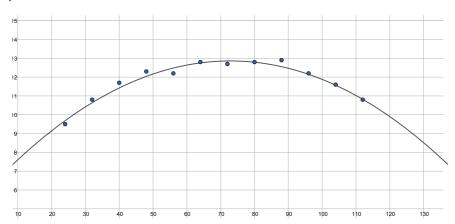
Sarana & Prasarana Pembelajaran

Kertas berpetak dan pisang

Diskusikan mengapa fungsi kuadrat sering digunakan sebagai model. Bagi kelas dalam kelompok untuk melakukan Eksplorasi 1 dan 2. Siswa dapat menggunakan aplikasi *GeoGebra* untuk mendapatkan grafik dan aplikasi *Microsoft Excel* bagian *regression* dari data analisis untuk mendapatkan konstanta-konstanta a, b, dan c dari fungsi kuadrat. Jika tidak menggunakan aplikasi *Microsoft Excel*, maka dapat memilih cara untuk mengonstruksi fungsi kuadrat seperti yang ada dalam subbab 2.

Jawaban Eksplorasi 6.9

$P(x) = -0,00133x^2 + 0,1938x + 5,8$

Kelajuan yang memberikan penghematan bahan bakar maksimum adalah 72,8 km/jam.

Jawaban Eksplorasi 6.10

Panjang kawat memenuhi $4x + 3y = 24$

Luas adalah $2xy$

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 24 \\ \tfrac{4}{3}x + y &= 8 \\ y &= 8 - \tfrac{4}{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas} &= 2xy \\ &= 2x\left(8 - \tfrac{4}{3}x\right) \\ &= 16x - \tfrac{8}{3}x^2 \end{aligned}$$

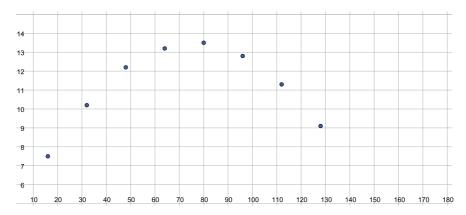
$$\begin{aligned} \text{Sumbu simetri} &= -\frac{16}{-\frac{16}{3}} \text{ dilalui titik puncak} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas maksimum} &= 16 \cdot 3 - \tfrac{8}{3} \cdot 3^2 \\ &= 48 - 24 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Kunci Jawaban Ayo Mencoba

Banyak buku yang dijual agar diperoleh pendapatan optimal atau maksimal adalah 1.800 buku.

Kunci Jawaban Latihan 6.6

1. Berdasarkan data dalam tabel maka untuk fungsi linear jika waktu bertambah satu detik maka jarak bertambah 2 m sedangkan untuk fungsi kuadrat perubahan pertambahan jarak terjadi ketika waktu bertambah satu detik.
2. Fungsi kuadrat $F(x) = -0,00165x^2 + 0,251x + 3,9$
   Penghematan maksimum terjadi pada kelajuan 80 km/jam.

3. Fungsi eksponen tidak memiliki nilai minimum dan tidak memiliki nilai maksimum.

Untuk menjawab refleksi di bawah ini berikan satu contoh untuk setiap poin, dapat menggunakan contoh soal yang sama, sesuaikan dengan keadaan.

1. Apakah kalian dapat membuat grafik fungsi kuadrat jika diberikan sekelompok data?
2. Apakah kalian dapat membuat fungsi kuadrat dari suatu masalah?

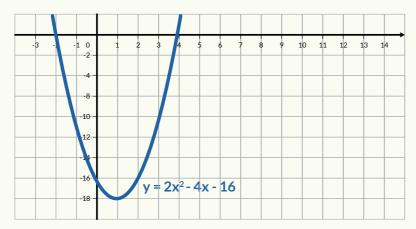
Refleksi

Pada akhir pembelajaran bab ini, minta siswa untuk memikirkan kembali apa saja yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan penuntun sebagai upaya guru untuk memastikan bahwa siswa sudah mencapai tujuan pembelajaran. Uji kompetensi juga diberikan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran dari bab ini.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

3. b

4.

a. Memotong sumbu X di (-2,0) dan (4,0)

b. Memotong sumbu Y di (0,-16)

c. Sumbu simetri $x = 1$

d. Nilai minimum, yaitu (1,-18)

3. Ketinggian maksimum dapat dihitung

a. **Alternatif 1**

$h(t) = -5t(t-8)$

memotong sumbu X di (0,0) dan (8,0)

Sumbu simetrinya $x = \frac{0+8}{2} = 4$

$h(4) = -5(4)(4-8)$

$= 80$

b. **Alternatif 2**

$D = b^2 - 4ac$

$= 40^2 - 4(-5)(0)$

$= 1600$

$\frac{D}{-4a} = \frac{1600}{-4(-5)}$

$= 80$

4. Ketinggian maksimum dapat dihitung

a. **Alternatif 1**

$P(q) = -20q(q-150)$

Memotong sumbu X di (0,0) dan (150,0)

Sumbu simetrinya $x = \frac{0+150}{2} = 75$

$P(75) = -20(75)(75-150)$

$= 112.500$

b. **Alternatif 2**

$\frac{D}{-4a} = \frac{9.000.000}{-4(-20)}$

$= 112.500$

Pengayaan

Proyek ini bersifat opsional dan dapat diberikan sebagai tugas tambahan.

Budi dan Agus mengukur ketinggian bola yang mereka lemparkan. Tabel 6.1 menunjukkan hasil pengukuran mereka.

Tabel 6.1 Ketinggian Bola

Waktu (detik)	0	1	3	5	6
Ketinggian (meter)	0,5	3	5	3	0,5

1. Ubahlah data pengamatan pada Tabel 6.1 menjadi bentuk grafik dan persamaan. Gunakan sumbu -x untuk menyatakan waktu dan sumbu -y untuk menyatakan ketinggian.

   Silakan menggunakan Aplikasi Desmos. Langkah-langkahnya:

   a. Masuk ke Aplikasi *Desmos* (www.desmos.com)

   b. Klik tanda + di bagian atas kolom kiri dan pilih **table**.

   c. Isilah tabel dengan data Tabel 6.1

   d. Perhatikan bahwa setiap kali kamu selesai mengisikan satu baris, ada satu titik yang muncul pada bidang koordinat. Titik ini koordinatnya diambil dari tabel.

   e. Tuliskan bentuk umum fungsi kuadrat ke dalam kolom kiri pada Aplikasi Desmos: $y = ax^2 + bx + c$.

f. Perhatikan bahwa saat Anda menuliskan fungsi kuadrat, ada tulisan yang muncul di bawahnya:

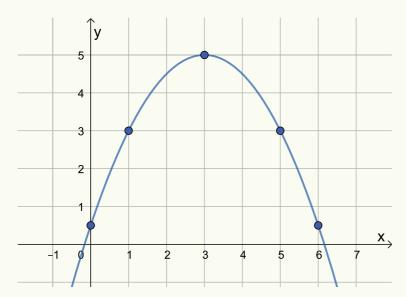
add slider: a b c **all**

g. Klik **all**

h. Akan muncul 3 buah slider yang dapat digeser-geser. Nilai-nilai a, b, c yang dipilih akan mempengaruhi grafik fungsi kuadrat yang dihasilkan. Silakan menggeser nilai-nilai tersebut sampai menemukan fungsi kuadrat yang melalui titik-titik dari tabel.

2. Apakah persamaan yang didapatkan melalui semua titik yang ada?
3. Apakah jawaban semua siswa sama?
4. Jika siswa melakukan percobaan yang sama, apakah akan mendapatkan hasil yang sama?
5. Apa yang perlu dilakukan jika tidak didapatkan fungsi kuadrat yang tepat melalui semua titik yang ada?

Jawaban:

Tabel 6.1 dapat dituliskan sebagai $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ dan grafiknya adalah https://www.desmos.com/calculator/najlyuf0x5

Data percobaan biasanya tidak sempurna dan pemodelan dengan grafik/persamaan mencari grafik/persamaan yang paling mendekati data yang ada.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab 7

Panduan Khusus

Statistika

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, Siswa diharapkan dapat:

1. Membedakan berbagai macam jenis data serta membuat grafik yang sesuai dan merepresentasikan data tersebut, serta melakukan analisis data untuk pengambilan kesimpulan.
2. Menggambar dan menginterpretasikan histogram, diagram garis batang, *line plot*;
3. Menentukan ukuran pemusatan dari kumpulan data: *mean*, median, dan modus, pada data tunggal dan data kelompok.
4. Menentukan ukuran penempatan dari kumpulan data: kuartil dan persentil pada data tunggal dan data kelompok.
5. Mengetahui ukuran penyebaran dari kumpulan data: jangkauan inter kuartil, varian, dan simpangan baku pada data tunggal dan data kelompok.
6. Membandingkan 2 kelompok data menggunakan ukuran pemusatan dan penyebaran.

Bab Statistika bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai statistik. Siswa akan dapat memilih tampilan data yang sesuai dan menginterpretasi data menurut bentuk distribusi data dan menggunakan ukuran pemusatan, ukuran lokasi, dan ukuran penyebaran.

Mereka membangun pemahaman bagaimana menghitung ukuran pemusatan sederhana (*mean*, modus, dan median) data tunggal yang sudah dipelajari di SMP. Ukuran pemusatan di Kelas 10 mencakup *mean*, median, dan modus baik data tunggal maupun data kelompok. Ukuran penempatan mencakup kuartil dan persentil. Ukuran penyebaran mencakup jangkauan (*range*), jangkauan interkuartil, varian, dan simpangan baku baik data tunggal maupun data kelompok.

Pada subbab A, siswa melakukan pengamatan dan berdiskusi mengenai perbedaan antara diagram batang dengan histogram. Setelah berhasil mengidentifikasi perbedaan antara diagram batang dengan histogram, mereka juga diajak untuk melihat bahwa dari sumber data yang sama, dapat dihasilkan 2 histogram yang berbeda. Pada subbab B, siswa mengamati bagaimana diagram batang dan histogram tidak selalu menggunakan frekuensi sesungguhnya, namun menggunakan frekuensi relatif. Diharapkan siswa mampu menggunakan frekuensi relatif saat membandingkan dua kelompok dengan total data yang berbeda. Pada subbab C, siswa mengulang materi SMP mengenai mencari ukuran pemusatan: *mean*, median, dan modus data tunggal. Tidak hanya menghitung, namun siswa juga dapat menentukan ukuran pemusatan mana yang paling sesuai untuk masalah kontekstual tertentu. Pada subbab D dan E, siswa mengamati bahwa walaupun data tunggal diubah menjadi data kelompok, namun ukuran pemusatan, ukuran penempatan (kuartil dan persentil) dan ukuran penyebaran (jangkauan, jangkauan interkuartil, varian, dan simpangan baku) tetap dapat digunakan untuk mendapatkan gambaran data secara keseluruhan untuk mengambil keputusan.

Secara umum, pada bab Statistik ini, siswa akan mempelajari bagaimana pemilihan diagram yang tepat akan membantu mereka dalam pengambilan keputusan berdasarkan data yang lebih tepat, bagaimana dampak perubahan atau penambahan data terhadap ukuran pemusatan, penempatan, dan penyebaran. Bagaimana membandingkan dua atau lebih kelompok melalui ukuran-ukuran pemusatan, penempatan, dan penyebaran. Setelah menyelesaikan bab ini, siswa diharapkan memiliki kebiasaan bertindak menggunakan data dan fakta yang ada serta fasih dalam menghitung, menggunakan serta menginterpretasikan ukuran-ukuran pemusatan, penempatan, dan penyebaran sesuai konteks dan situasi dari masalah yang dihadapi.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode Pembelajaran dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
A. Histogram	2	• Membedakan berbagai jenis data serta membuat grafik yang sesuai dan merepresentasikan data tersebut, serta melakukan analisis data untuk pengambilan kesimpulan.	Histogram & Diagram Batang	Histogram, diagram batang, frekuensi	*Discovery learning*	Buku siswa	
B. Frekuensi Relatif	2	• Menggambar dan menginterpretasikan histogram dan diagram batang.	Frekuensi Relatif	Diagram lingkaran, diagram batang ganda, luas pada histogram	*Problem based learning*	Buku siswa	

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode Pembelajaran dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
C. Ukuran Pemusatan	2	• Menentukan ukuran pemusatan dari kumpulan data: modus dan median melalui *line plot*.	Modus & Median	*Line plot*, modus, median, data tunggal	*Problem based learning*	Buku Siswa	
	2	• Menentukan ukuran pemusatan dari kumpulan data: *mean*, median, dan modus.	*Mean*	Jumlah data, banyak data, *mean*	*Problem based learning*	Buku Siswa	
	2		Penggunaan Ukuran Pemusatan	Pencilan	*Discovery learning*	Buku Siswa	
	2	• Menentukan ukuran pemusatan dari kumpulan data kelompok: *mean*, median, dan modus.	*Mean* Data Kelompok	Nilai tengah, sigma	*Problem based learning*	Buku Siswa	
	4	• Membandingkan hasil *mean*, modus, dan median pada data tunggal dan data kelompok.	Median & Modus Data Kelompok	Interpolasi, kesebangunan	*Discovery learning*	Buku Siswa	

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode Pembelajaran dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
D. Ukuran Penempatan	4	• Menentukan ukuran penempatan dari kumpulan data: kuartil dan persentil dari data tunggal dan data kelompok	Kuartil dan Persentil	Kuartil, Persentil, kuartil bawah, kuartil atas, kuartil tengah	*Discovery learning*	Buku Siswa	
E. Ukuran Penyebaran	4	• Ukuran penyebaran dari kumpulan data: Jangkauan interkuartil, varian, dan simpangan baku. • Membandingkan 2 kelompok data menggunakan ukuran pemusatan dan penyebaran.	Varian dan Simpangan Baku	*Range*, Jangkauan Interkuartil, varian, simpangan baku, *mean*	*Discovery learning*	Buku Siswa	

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Histogram

- Membedakan berbagai jenis data serta membuat grafik yang sesuai dan merepresentasikan data tersebut, serta melakukan analisis data untuk pengambilan kesimpulan.
- Menggambar dan menginterpretasikan histogram dan diagram batang.

- Kertas kotak-kotak/milimeter blok
- Penggaris
- Kalkulator

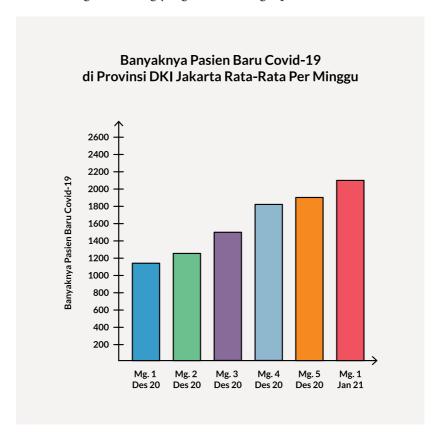
Perkenalkan bab ini dengan PEMBUKA BAB dan menanyakan siswa kapan konsep statistik muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan tiga pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap tiga pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai statistik.

Gunakan bagian MENGINGAT KEMBALI mengenai diagram sederhana dan menghitung ukuran pemusatan data tunggal yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa.

- Diagram apa saja yang pernah kalian pelajari saat SMP?
- Pernahkah melihat diagram lingkaran? Diagram batang?
- Informasi apa saja yang ada di dalam diagram lingkaran?
- Informasi apa saja yang ada di dalam diagram batang?

Mulai aktivitas pembelajaran dengan membahas data penambahan kasus Covid-19 yang pernah dilihat oleh siswa baik di media elektronik, maupun di media

daring. Kemudian minta siswa melakukan Eksplorasi 7.1 di PERMASALAHAN PEMBUKA. Mereka melakukan pengamatan data yang terdapat pada Tabel 7.1 lalu melengkapi diagram batang berdasarkan data pada Tabel 7.1. Siswa dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

1. Minggu ke-4 Desember 2020 memiliki kenaikan paling tinggi yaitu sebanyak 1.830 – 1.520 = 310
2. Berikut ini diagram batang yang sudah dilengkapi.

Setiap siswa memberikan estimasi disertai alasannya. Soal no.3 ini merupakan soal dengan banyak solusi, namun motivasi siswa untuk berani memberikan estimasi dan menjelaskan alasannya.

3. Contoh jawaban siswa

Alternatif 1: 2.420, karena dari data sebelumnya ada beberapa data yang kenaikannya sekitar 300, jadi 2.120 + 300 = 2.420 kasus pada minggu kedua Januari 2021

Alternatif 2: sekitar 2.332, karena dari data sebelumnya rata-rata kenaikan sekitar 10% dari minggu sebelumnya. Jadi penambahan kasus pada minggu kedua Januari 2021 sebanyak 2.120 × 10% = 212 kasus. Total kasus pada minggu kedua Januari 2021 sebanyak 2.120 + 212 = 2.332

Alternatif 3: antara 2.500 sampai 2.700, karena minggu kedua Januari 2021, tepat 2 minggu dari liburan panjang Natal dan Tahun Baru, di mana pada kejadian sebelumnya, setelah libur panjang, penambahan kasus akan lebih dari biasanya. Perkiraan akan bertambah 400 sampai 600 kasus.

4. **Ayo Berpikir Kritis**

Pemilihan grafik yang tepat akan memberikan gambaran yang lebih tepat.

Untuk melihat peningkatan kasus, grafik memberikan gambaran yang lebih cepat, yaitu dengan melihat beda panjang batang yang bersebelahan dengan selisih terbesar.

Pada **subbab A**, siswa diminta melakukan pengamatan beda histogram (Gambar 1) dengan diagram batang (Gambar 2).

Dari Gambar 7.1 dan Gambar 7.2, carilah perbedaan dari histogram dan diagram batang.

Jawaban siswa adalah sebagai berikut.

- Batang pada histogram saling menempel, sedangkan batang pada diagram batang terpisah satu sama lain.
- Pada histogram, lebar batang tidak selalu sama besar, namun pada diagram batang, lebar semua batang sama.
- Data pada diagram batang merupakan data yang bersifat kategori yaitu merek HP, sedangkan data pada histogram merupakan data kuantitatif atau data berupa bilangan, yaitu lama (waktu) penggunaan HP.

Pada (Ayo Berdiskusi) Gambar 7.3 mengenai dari sumber data yang sama, namun menghasilkan dua histogram berbeda. Hal itu dikarenakan ada penggabungan 2 kelas 0-2 dan 2-4 menggunakan prinsip luas persegi panjang.

Jawaban dari Ayo Mencoba: Mengapa kelas 8-10 dan kelas 10-12 pada histogram kiri dapat digabung menjadi kelas 8-12 pada histogram kanan?

Pada histogram kiri:
Luas kelas 8-10 adalah $2 \times 12 = 24$
Luas kelas 10-12 adalah $2 \times 4 = 8$
Luas gabungan kelas 8-10 dan 10-12 adalah $24 + 8 = 32$

Pada histogram kanan:
Luas kelas 8-12 adalah $4 \times 8 = 32$

Luas gabungan kelas 8-10 dan 10-12 pada histogram kiri sama dengan luas kelas 8-12 pada histogram kanan. Jadi, kedua histogram menampilkan data yang sama hanya dalam tampilan diagram batang yang berbeda.

Kaitkan hasil pengamatan siswa terhadap tabel dan histogram yang diberikan dengan PENJELASAN KONSEP dan tampilkan contoh-contoh bagaimana menggambar histogram berdasarkan tabel data. Khususnya, perbedaan jenis data kategori dan data kuantitatif sehingga dapat menentukan jenis diagram apakah diagram batang atau histogram dengan lebih tepat. Diskusikan jika masih ada yang belum jelas atau membingungkan.

Mintalah siswa mengerjakan Latihan 7.1 untuk memeriksa pemahaman mereka.

Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan dalam menggabungkan kelas pada histogram, minta siswa melihat banyaknya persegi kecil pada masing-masing kelas di histogram kiri dan kanan.

Misal, banyaknya persegi kecil di kelas 0-2 ada sebanyak 8 persegi dan banyaknya persegi kecil di kelas 2-4 ada sebanyak 16 persegi, sehingga total persegi kecil ada sebanyak 24 buah. Lakukan hal yang sama pada histogram kanan dengan menghitung banyaknya persegi kecil lalu membandingkannya.

Kunci Jawaban Latihan 7.1

1. a. 25 atlet; 20 negara
   b. Peraih medali emas: Norwegia 1; sekitar 27 menit
   c. 8 pelari
   d. Menggunakan histogram dengan data catatan waktu di sumbu x dan banyaknya atlet di sumbu y. Pertanyaan yang dapat dijawab dengan histogram ini adalah berapa banyak pelari yang memiliki catatan waktu antara 30-35 menit?

2. a.

Catatan Waktu Atlet (menit:detik)	Frekuensi
27:00–28:59	7
29:00–30:59	9
31:00–32:59	4
33:00–36:59	2
37:00–38:59	2
39:00–40:59	0
41:00–42:59	0
43:00–44:59	0
45:00–46:59	1
47:00–48:59	0

b.

Catatan Waktu Atlet Lintas Alam

Frekuensi

Waktu (menit)

c. Interval 29:00-30:59

d. Mayoritas atlet berlari dengan waktu di bawah 31 menit. Hampir tidak ada atlet yang berlari dengan waktu lebih dari 39 menit.

Pada **subbab B**, diawali dengan kegiatan Eksplorasi 7.2. Frekuensi Relatif dalam Histogram

Ayo berdiskusi dengan menjawab pertanyaan berikut.

Siswa melakukan pengamatan Gambar 7.5.
Guru dapat menanyakan hal sebagai berikut sebagai pertanyaan penuntun.

Kalian sebelumnya telah belajar mengenai histogram. Apakah perbedaan histogram pada Gambar 7.5 dengan yang sebelumnya? (pada sumbu y, kali ini tertulis persentase jumlah siswa, bukan hanya jumlah siswa)

Lalu guru bisa melanjutkan dengan pertanyaan yang ada di buku siswa:

- Dari histogram pada Gambar 7.5, ditunjukkan bahwa ada 16% siswa yang mendapatkan nilai matematika di antara 70 sampai 75. Apakah ini berarti ada 16 siswa yang berada di kelas tersebut? Jelaskan. (Jika banyaknya siswa tepat ada sebanyak 100 orang, maka 16% juga menyatakan jumlah siswa sebanyak 16 orang di kelas 70-75, namun karena kita tidak mengetahui banyaknya siswa, maka 16% pada sumbu y belum tentu sama dengan 16 orang)

- Interval kelas manakah yang memiliki persentase terbesar? (Kelas 80-85) Berapa persen kelas dengan interval tersebut? (24%)
- Misalkan ada 200 siswa yang mengikuti ulangan matematika tersebut. Berapakah banyaknya siswa yang mendapatkan nilai 85 ke atas tapi dibawah 90? (Kelas 85-90 memiliki persentase 18%, maka banyaknya siswa di kelas tersebut sebanyak 18% × 200 siswa = 36 siswa.)
- Apabila kalian menambahkan seluruh persen pada setiap interval, berapakah seharusnya jumlah total persen yang kalian peroleh? Jelaskan. (Total persentase tidak mungkin melebihi 100%, berikan kesempatan kepada siswa untuk menguji pernyataan ini dengan melihat persentase tiap kelas dan menjumlahkannya)

Kunci Jawaban Latihan 7.2

Ayo Bekerja Sama

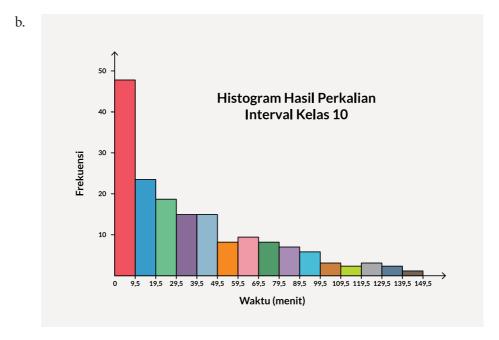
Ayo bekerja sama dalam melengkapi tabel di bawah ini agar waktu yang diperlukan menjadi lebih sedikit.

1. Kalian pernah belajar mengenai perkalian dari 0 × 0 sampai 12 × 12. Lengkapilah tabel perkalian di bawah ini.

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

a)

Kelas	Frekuensi	Kelas	Frekuensi
0-9	48	80-89	7
10-19	23	90-99	6
20-29	19	100-109	3
30-39	15	110-119	2
40-49	15	120-129	3
50-59	8	130-139	2
60-69	9	140-149	1
70-79	8		

b.

c. Tidak merata. Kelas 0-9 memiliki frekuensi yang terbanyak.

d.

Histogram Hasil Perkalian Interval Kelas 10

Frekuensi

70 60 50 40 30 20 10

0 19,5 39,5 59,5 79,5 99,5 119,5 139,5 159,5

Waktu (menit)

e. Persamaan, kelas terbesar adalah kelas pertama. Kebanyakan data berkumpul di dua kelas yang pertama dan semakin ke kanan, frekuensi kelas semakin kecil. Kebanyakan data terkumpul di sebelah kiri histogram. Perbedaannya terletak pada lebar kelas dari kedua histogram di atas.

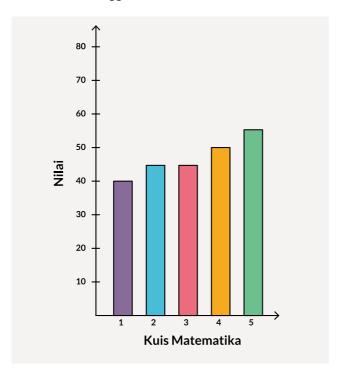
2. a. Karena banyaknya siswa laki-laki dan siswa perempuan tidak sama, dan kita akan membandingkannya.

b.

c. Dengan grafik diagram batang ganda, siswa dapat melihat perbandingan dua kelompok data dengan lebih baik karena pada kategori yang sama, diagram batang dari kedua kelompok data ditampilkan berdampingan. Misalnya ternyata kelompok siswa perempuan lebih banyak di 3 kategori yaitu "sepanjang Sabtu Minggu", "hanya 1 hari" dan "hanya $\frac{1}{2}$ hari". Kelompok siswa laki-laki hanya lebih banyak di kategori "kurang dari $\frac{1}{2}$ hari".

3. a. Nilai kuis pertama Dani adalah 40, dan nilai kuis ketiga Dani adalah 55. Jadi, tidak benar kalau nilai kuis ke-5 Dani tiga kali nilai kuis pertamanya.

   b. Pada sumbu y, tidak memiliki skala yang sama. Dari 0 ke 35 digambarkan sangat pendek sehingga tidak memberikan gambaran data yang sesungguhnya.

   c. (Penguatan karakter) Diagram batang yang baru dapat memberikan hasil lebih akurat dan menggambarkan performa Dani yang sebenarnya di kuis Matematika mingguan:

B. Frekuensi Relatif

Pengalaman Belajar

- Menentukan ukuran pemusatan dari kumpulan data: modus dan median melalui *line plot*.
- Menentukan ukuran pemusatan dari kumpulan data: *mean*, median, dan modus.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

Kalkulator

Apersepsi

Untuk subbab ini, dapat diawali dengan mengingat kembali topik mencari *mean*, modus, dan median yang pernah dipelajari oleh siswa saat di jenjang SMP.

Guru dapat menampilkan data sederhana, misalnya 5, 6, dan 7.
Berapa *mean*, median, dan modus dari data ini.
Mean = $\frac{5+6+7}{3} = \frac{18}{3} = 6$

Median adalah data yang berada tepat di tengah setelah data diurutkan dari yang kecil ke besar, yaitu terletak di data ke 2. Jadi, median = 6.

Modus adalah data yang paling sering muncul. Dari data 5, 6, dan 7, karena masing-masing data hanya muncul 1×, maka tidak memiliki modus.

Selanjutnya guru dapat menambahkan 1 buah data tambahan yaitu 7 sehingga data menjadi 5, 6, 7, 7.

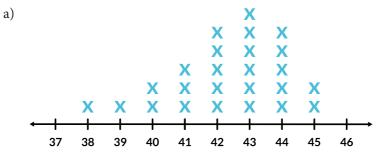
Minta siswa menghitung *mean*, median, dan modusnya.
Mean = $\frac{5+6+7+7}{4} = \frac{25}{4} = 6{,}25$
Untuk Median, karena banyaknya data ada sebanyak genap (4 buah), maka Median terletak di antara data ke 2 dan ke 3. Median = $\frac{6+7}{2} = 6{,}5$
Modus = 7, karena 7 muncul sebanyak 2× dan data lain hanya muncul 1×.

Setelah ini para siswa akan belajar untuk mencari ukuran pemusatan untuk jumlah data yang lebih banyak.

Mulai aktivitas pembelajaran dengan membahas Ayo bereksplorasi. **Eksplorasi 7.3**. *LINE PLOT*.

Ajak siswa untuk mengenal sebuah diagram sederhana namun dapat membantu siswa dalam menemukan ukuran pemusatan dan melihat sebaran data dengan mudah, yaitu *line plot*.

Jawaban Eksplorasi 7.3

a)

b) Dari *line plot*, terlihat bahwa mayoritas pemain basket di SMA memiliki ukuran sepatu nomor 42 sampai 44. Ukuran lainnya, tetap ada, hanya saja tidak dominan. Hal ini cukup masuk akal melihat usia siswa SMA dan tinggi siswa pemain basket yang cenderung tinggi.

c) Data terkecil = 38, data terbesar = 45.

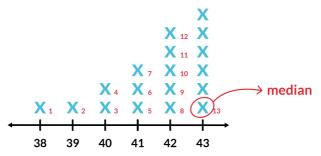
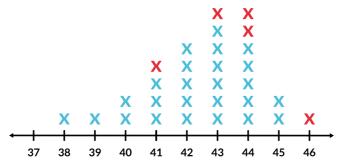
d) Pada *line plot*, data terkecil dilihat dari tanda X yang berada di paling kiri, data terbesar terletak di *line plot* yang paling kanan.

e) Jangkauan = 45 – 38 = 7.

f) Modus = 43, karena muncul terbanyak yaitu sebanyak 6 kali.

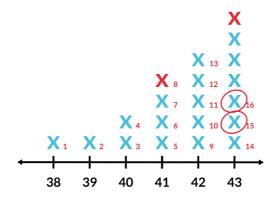
g) Dari *line plot*, modus ditemukan yang memiliki tanda X paling tinggi.

h) Banyak data = 25, median terletak di data ke-13, agar di sebelah kiri median ada 12 data dan di sebelah kanan median ada 12 data. Urutkan data dari kecil ke besar, lalu carilah data yang terletak di urutan ke-13, yaitu median = 43.

i) Karena kita sudah mengetahui bahwa median terletak di data ke-13, maka pada *line plot*, hitunglah dari kiri ke kanan, bawah ke atas, tanda X yang berada di urutan ke-13 adalah median. Median = 43.

j) Setelah ada penambahan data 41, 43, 44, 44, dan 46, *line plot* berubah menjadi

Jangkauan sekarang = 46 – 38 = 8

Modus sekarang = 43 dan 44, artinya kelompok data yang baru memiliki 2 modus atau bimodal.

k) Sebelum mencari median yang baru, diskusikan bersama siswa jika sebelumnya banyaknya data 25 buah yaitu bilangan ganjil, bagaimana dengan banyak data yang baru yaitu 30 buah?

Median terletak di antara data ke-15 dan data ke-16.

Data ke-15 = 43, data ke-16 = 43. Median = 43

Dari diskusi dan eksplorasi di atas, cobalah meminta siswa untuk:

i. Membandingkan median dan modus data lama dengan median dan modus data yang baru. Walaupun terdapat data baru yang nilainya berbeda jauh,

yaitu 46 (disebut dengan isitilah pencilan), namun modus dan median tidak terpengaruh.

ii. Melakukan generalisasi urutan median jika banyaknya data ganjil dan banyaknya data genap sampai kelas menemukan generalisasi sebagai berikut:

Untuk mencari letak median, bagilah banyaknya data dengan 2.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m, maka median terletak di tengah-tengah di antara urutan ke-m dan ke-(m + 1).
- Jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka median terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Lalu, kegiatan kelas dapat dilanjutkan dengan melakukan Eksplorasi 7.4: *Mean*.

Pada awal eksplorasi siswa dapat diingatkan mengenai istilah *mean* juga sering disebut sebagai rerata atau rata-rata. Ajak siswa untuk melihat soal mengenai OSIS yang akan menyumbang para korban bencana. Melalui soal ini, guru dapat mengingatkan pentingnya semangat saling menolong sesama tanpa membeda-bedakan agama, suku, dan ras. Ajak siswa untuk menjadi pelopor tindakan kebaikan untuk menginspirasi siswa lain.

Jawaban Eksplorasi 7.4

Urutkan dulu data sehingga menjadi seperti ini:

3 3 4 5 5 6 7 8 9 10

a) *Mean* = $\frac{60}{10}$ = 6, median = $\frac{5+6}{2}$ = 5,5 dan modus = 5

b) Data baru menjadi:

3 3 4 5 5 6 7 8 9 10 20 22

Mean = $\frac{102}{12}$ = 8,5, median = $\frac{6+7}{2}$ = 6,5 dan modus = 5

Minta siswa melakukan pengamatan, ukuran pemusatan mana yang memiliki perubahan paling besar karena adanya tambahan 2 data baru. (Modus dan Median, nilainya cenderung tetap atau tidak terpengaruh dengan data yang ekstrem/pencilan, sedangkan nilai *mean* terpengaruh dengan data pencilan).

Di subbab C, siswa akan diberikan data yang sangat ekstrem agar dapat melihat perubahan yang terjadi.

Jika seandainya siswa ke-12 bukan menyumbang 22 buah, namun menyumbang 100 pakaian,

3	3	4	5	5	6	7	8	9	10	20	100

maka sebelum menghitung ukuran pemusatan yang baru, diskusikan di kelas mengenai ukuran pemusatan manakah yang akan berubah. Siswa dengan pemahaman yang baik akan menjawab *mean* akan berubah secara signifikan, sedangkan nilai median dan modus relatif tetap. Minta siswa membuktikannya dengan menghitung ukuran pemusatan itu berdasarkan data yang baru.

$$Mean = \frac{180}{12} = 15,\ \text{median} = \frac{6+7}{2} = 6{,}5 \text{ dan modus} = 5$$

Mean berubah secara signifikan. Median dan modus tidak berubah.
Jadi data yang ekstrem hanya berpengaruh pada *mean*, tapi tidak pada median dan modus.

Pada **subbab C. *Median* dan Kelas Modus Data Kelompok** , siswa akan melihat ketika data tunggal dikelompokkan menjadi data kelompok, ukuran pemusatan data tunggal tidak berbeda atau relatif sama dengan data kelompok.

Dari data tunggal pada kegiatan eksplorasi 3 mengenai penjualan sepatu dengan banyak data = 30 buah, minta siswa menghitung *mean* data tunggal terlebih dahulu:

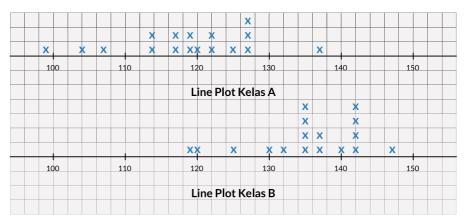
$$Mean = \frac{38+39+(2\times 40)+(4\times 41)+(5\times 42)+(7\times 43)+(7\times 44)+(2\times 45)+46}{30} = 42{,}5$$

Lalu minta siswa membandingkan dengan *mean* data kelompok = 42,6.
Mean data tunggal dengan *mean* data kelompok dapat dikatakan relatif sama, sehingga pengelompokkan data tunggal menjadi data kelompok tidak akan mengubah nilai *mean* secara signifikan.

Kunci Jawaban Latihan 7.3

1. a. Modus = 43 dan 44, median = 43, *mean* = 42,5.
   b. Karena penjualan sepatu nomor 43 dan 44 sebanyak 14 buah atau hampir 50% dari total penjualan, maka penggunaan modus dalam perencanaan pemesanan sepatu bulan depan sudah tepat.
2. a. Modus = 0, median = 3
   b. penggunaan median lebih baik, karena banyaknya data yang berada di sekitar median (data 2, 3, dan 4) ada sebanyak 8 buah atau mencakup 50% data sehingga median lebih mewakili kumpulan data dibanding modus.
3. Banyak kemungkinan jawaban. Salah satu di antaranya adalah:
   3, 3, 4, 4, 4, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13

(Guru dapat menambah tantangan, misalnya kumpulan data memiliki bimodal atau data terbesar diubah menjadi 10)

4. a.

b. *Range* kelas A = 137 – 109 = 28

Range kelas B = 147 – 119 = 28

Modus kelas A = 127, modus kelas B = 135 dan 142

Median kelas A = 119, median kelas B = 135

c. Kelas B berasal dari kelas yang lebih tinggi, karena dari data median kelas B = 135, artinya 50% siswa kelas B memiliki tinggi badan lebih dari 135 cm. Kelas A yang memiliki median = 127, artinya 50% siswa dari kelas A memiliki tinggi badan lebih dari 119. Dari *line plot* juga terlihat sebaran data kelas B lebih tinggi dari sebaran data di kelas A. Atau secara umum, anak-anak di kelas B lebih tinggi dari anak-anak di kelas A.

d. Median kelas A = 119. Dari *line plot* kedua kelas terlihat bahwa seluruh siswa kelas B memiliki tinggi sama atau lebih tinggi dari 119 cm atau 100% siswa kelas B.

5. a. Kelas modus terletak pada kelas 25-27

b. *Mean* = $\frac{(4 \times 20) + (17 \times 23) + (25 \times 26) + (14 \times 29)}{60} = \frac{1527}{60}$ = 25,45

c. Kelas median terletak pada kelas 25-27

C. Ukuran Pemusatan

- Menentukan ukuran pemusatan dari kumpulan data kelompok: median dan modus.
- Membandingkan hasil modus dan median pada data tunggal dan data kelompok.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

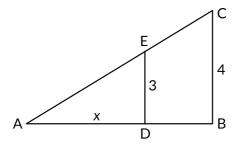
- Kertas kotak-kotak/milimeter blok
- Penggaris
- Kalkulator

Apersepsi

Setelah siswa membandingkan *mean* data tunggal dengan *mean* data kelompok pada subbab sebelumnya yang ternyata hasilnya relatif sama, maka pada subbab ini siswa akan diajak untuk melakukan hal yang sama pada ukuran pemusatan lainnya yaitu modus dan median.

Untuk mencari modus dari data kelompok, dibatasi hanya sampai mencari kelas modusnya saja.

Untuk mencari median data kelompok, akan digunakan prinsip interpolasi. Prinsip interpolasi sendiri sebenarnya secara tidak langsung pernah dipelajari siswa saat di SMP pada topik geometri: kesebangunan.

Ajak siswa melihat soal kesebangunan sederhana berikut:

Diketahui ΔABC dan ΔADE saling sebangun artinya

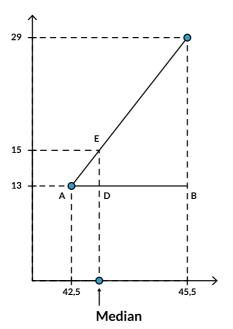
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

Jika diketahui panjang sisi AD = x, AB = 6, DE 3 dan BC = 4, maka diskusikan dengan siswa, cara mencari nilai x.

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{6}$$

Diperoleh $x = \frac{3}{4} \times 6 = 4,5$

Prinsip kesebangunan ini akan dipakai pada metode interpolasi.
Jika data ke-13 adalah 42,5 dan data ke-29 adalah 45,5 maka tentukanlah data yang terletak di urutan ke-15?

AD = median – 42,5

AB = 45,5 – 42,5 = 3

DE = 15 – 13 = 2

BC = 29 – 13 = 16

$\Delta ADE \backsim \Delta ABC$

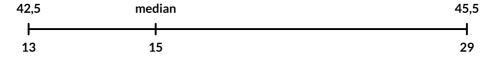
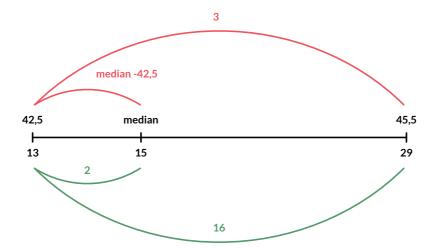
$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{\text{median} - 42,5}{3} = \frac{2}{16}$$

$$\text{median} - 42,5 = \frac{1}{8} \times 3$$

$$\text{median} - 42,5 = 0,375$$

$$\text{median} = 42,875$$

Untuk metode interpolasi sendiri, ajak siswa untuk mengaitkan angka-angka pada gambar kesebangunan segitiga di atas menjadi sebagai berikut:

Minta siswa membandingkan garis bilangan ini dengan gambar kesebangunan sebelumnya. Perbandingan panjang yang manakah yang sama dengan prinsip kesebangunan di atas?

Jika sebelumnya kita membandingkan “merah pendek” dengan “hijau pendek” dan “merah panjang” dengan “hijau panjang”, bagaimana jika kali ini kita membuat perbandingan dengan mengelompokkan yang berwarna sama. Merah dengan merah, dan hijau dengan hijau?
Apakah masih akan memberikan hasil yang sama?

$$\begin{aligned}\frac{\text{median}-42,5}{3} &= \frac{2}{16}\\ \text{median}-42,5 &= \frac{2}{16}\times 3\\ \text{median} &= 42,5+\frac{3}{8}\\ \text{median} &= 42,875\end{aligned}$$

Minta siswa membandingkan hasil dari median data kelompok ini dengan median pada data tunggal. Minta mereka memberikan kesimpulan. (bahwa ternyata data tunggal yang dikelompokkan tidak mengubah median secara signifikan)

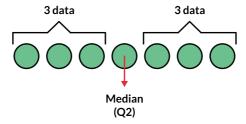
D. Ukuran Penempatan

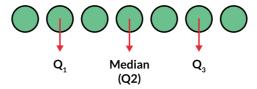
Menentukan ukuran penempatan dari kumpulan data: kuartil dan persentil dari data tunggal dan data kelompok.

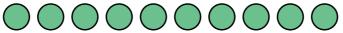
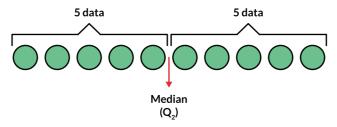
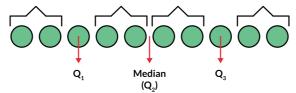
- Kertas kotak-kotak/milimeter blok
- Penggaris
- Kalkulator

Pada subbab ini, jika sebelumnya mereka sudah mengenal median yang membagi 2 kelompok data sama besar atau masing-masing 50%, kenalkan istilah kuartil yang berasal dari kata-kata quarter atau seperempat. Jadi kuartil akan membagi kumpulan data menjadi 4 bagian yang sama besar.

Berikan siswa visualisasi mengenai apa yang dimaksud kuartil pada data tunggal, dimulai dari 7 buah data.

Sesuai dengan pengetahuan awal mengenai median, minta siswa menentukan data mana yang menjadi median.

Siswa dengan pemahaman yang benar, akan menjawab bahwa median berada di data ke-4, karena ada tepat 3 data di kanan dan kiri median. Gunakan kesempatan ini untuk memperkenalkan bahwa median sama dengan kuartil tengah atau Q_2.

Minta siswa untuk menentukan letak Q_1 dan Q_3 yang tepat membagi dua sama besar 3 data yang ada di kiri dan kanan median.

Q_1 terletak di data ke-2 dan Q_3 terletak di data ke-6. Pada visualisasi ini tampak bahwa Q_1, Q_2, dan Q_3 membagi data menjadi 4 bagian sama besar.

Berikan situasi yang lain, misalnya dengan menambah banyaknya data menjadi 10 data.

Minta mereka menentukan mediannya terlebih dahulu. Karena jumlah data genap, maka Q_2 terletak di antara data ke-5 dan ke-6.

Lalu tentukan juga Q_1 dan Q_3, agar keseluruhan data terbagi menjadi 4 bagian sama besar. Karena di sebelah kiri dan kanan median terdapat 5 data maka:

Dari visualisasi ini terlihat bahwa Q_1 terletak di data ke-3 dan Q_3 terletak di data ke 8.

Dari 2 percobaan di atas, buatlah tabel agar siswa mampu menarik generalisasi.

Banyak data, n	$\frac{1}{4}n$	**Letak Q_1**	$\frac{1}{2}n$	**Letak Q_2**	$\frac{3}{4}n$	**Letak Q_3**
7	1,75	Data ke-2	3,5	Data ke-4	5,25	Data ke-6
10	2,5	Data ke-3	5	Antara 5 & 6	7,5	Data ke-8

Diskusikan dengan siswa, mengapa menggunakan $\frac{1}{4}n$, $\frac{1}{2}n$, dan $\frac{3}{4}n$

Lanjutkan diskusi sampai siswa dapat menemukan generalisasi:
untuk mencari letak kuartil bawah atau Q_1, bagilah banyaknya data dengan 4.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m, maka Q_1 terletak di tengah-tengah antara urutan ke-m dan ke-(m + 1).
- Jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_2 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Generalisasi untuk Q_3:
untuk mencari letak kuartil bawah atau Q_3 adalah dengan mengalikan banyaknya data dengan $\frac{3}{4}$.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m, maka Q_3 terletak di tengah-tengah antara urutan ke-m dan ke-(m + 1).
- Jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_3 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Ajak siswa untuk melihat visualisasi dari 20 data pada Gambar 10 dan 11. Lalu, mengujinya dengan generalisasi yang telah mereka temukan sebelumnya. Lalu, mengujinya dengan generalisasi yang telah mereka temukan sebelumnya.

Karena $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4} \times 20 = 5$, maka Q_1 terletak di antara data ke-5 dan ke-6.

Karena $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \times 20 = 10$, maka Q_2 terletak di antara data ke-10 dan ke-11.

Karena $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \times 20 = 15$, maka Q3 terletak di antara data ke-15 dan ke-16.

Jawaban Ayo Mencoba

Carilah Q_1, Q_2, dan Q_3 dari data penjualan sepatu pada Tabel 6.

Pada tabel 7.5, banyaknya data yaitu 30 buah, maka:

$\frac{1}{4}n = \frac{1}{4} \times 30 = 7,5$. Q_1 terletak di data ke-8, maka nilai $Q_1 = 41$

$\frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \times 30 = 15$. Q_2 terletak di data ke-15 dan ke-16, maka nilai $Q_2 = 43$

$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \times 30 = 22,5$. Q_3 terletak di data ke 23, maka nilai $Q_3 = 44$

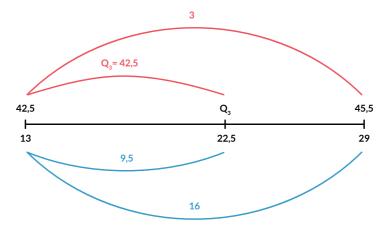
Setelah menguasai bagaimana mencari kuartil data tunggal, maka siswa lanjut dengan subbab mencari kuartil untuk data kelompok. Sama dengan mencari median pada data kelompok, kita juga akan menggunakan interpolasi.

Sebelum melakukan interpolasi, sama seperti pada data tunggal, siswa perlu mencari dulu letak masing-masing kuartil. Hanya saja di data kelompok, siswa tidak dapat menggunakan generalisasi data tunggal.

Lakukan diskusi dengan contoh yang terdapat di buku siswa yang mengambil data dari Tabel 7.6.

Jawaban Ayo Mencoba

Q_3 terletak pada data ke $\frac{3}{4} \times 30 = 22,5$
Data ke-22,5 terletak pada kelas 43-45.
Tepi bawah kelas 43-45 adalah 42,5 yang merupakan data ke-13.
Tepi atas kelas 43-45 adalah 45,5 yang merupakan data ke-29.

Gambarlah garis bilangan untuk mencari Q_3 dengan interpolasi.

Bandingkan "merah" dengan "merah" dan "biru" dengan "biru", sehingga terbentuk perbandingan sebagai berikut

$$\frac{Q3 - 42,5}{3} = \frac{9,5}{16}$$
$$Q_3 - 42,5 = \frac{9,5}{16} \times 3$$
$$Q_3 - 42,5 = 1,78$$
$$Q_3 = 44,28$$

Q_3 dari data tunggal adalah 44. Artinya Q_3 data tunggal dan Q_3 data kelompok tidak berbeda signifikan.

Pada subbab selanjutnya, siswa akan mempelajari mengenai ukuran lokasi lainnya yaitu persentil. Jika kuartil membagi data menjadi 4 bagian sama besar, maka persentil, sesuai dengan asal katanya, percent atau per seratus, akan membagi data menjadi 100 bagian sama besar.

Tekankan ke siswa bahwa tidak ada rumus atau generalisasi yang baru, baik untuk data tunggal maupun data kelompok. Perbedaannya hanya jika sebelumnya membagi data menjadi 4, maka pada persentil membagi data menjadi 100.

Gunakan contoh soal di Buku Siswa untuk mencari Persentil ke-65 atau P_{65}.

Kunci Jawaban Latihan 7.4

1. a. Median = 190 b. Q_1 = 145,5 Q_3 = 279,5

   tidak perlu melakukan interpolasi, karena data yang diberikan adalah data tunggal.

2. a. Median = 432 kg.

   b. Q_1 = 389,08 kg, perlu menggunakan interpolasi karena data merupakan data kelompok.

   c. Q_3 = 479,86 kg

   d. 25% dari sapi kurban memiliki berat lebih dari 479,86 kg.

   e. P_{10} = 352,8 kg artinya 10% dari total sapi memiliki berat di bawah 352,8 kg.

3. a. Q_1 =175,64 cm ; Q_3 = 183 cm.

   b. P_{80} = 184,6 cm artinya 20% pohon memiliki panjang bentang sayap minimal 184,6 cm.

   c. Karena P_{90} terletak di kelas "Lebih dari 186" yang tidak memiliki tepi atas.

E. Ukuran Penyebaran

- Ukuran penyebaran dari kumpulan data: jangkauan interkuartil, varian, dan simpangan baku.
- Membandingkan 2 kelompok data menggunakan ukuran pemusatan dan penyebaran.

Sarana & Prasarana Pembelajaran

Kalkulator

Setelah siswa menguasai ukuran pemusatan dan ukuran penempatan, maka pada subbab E ini, siswa akan mempelajari ukuran penyebaran yang juga sangat penting

ketika siswa ingin mendapatkan kesimpulan yang lebih jelas dari suatu kelompok data.

Siswa diberikan 2 kelompok data tentang umur, yang ternyata kedua kelompok ini memiliki rata-rata yang sama, yaitu 16. Pertanyaan pemantik, manakah kelompok yang mewakili siswa dan mana yang mewakili orang tua dan anak kecil? Pertanyaan ini bertujuan untuk memunculkan kesadaran bahwa *mean* = 16, belum tentu menunjukkan bahwa kelompok data berusia sekitar 16 tahun, namun tergantung pula dari ukuran penyebaran.

Siswa akan menghitung 3 macam ukuran pengukuran yaitu jangkauan interkuartil, varian, dan simpangan baku.

Pemberian kelompok ketiga di mana semua anggota data bernilai 16, merupakan kelompok data yang juga memiliki rata-rata 16, namun memiliki ukuran penyebaran = 0, baik pada jangkauan interkuartil, varian, maupun simpangan baku.

Eksplorasi 7.7 dan Eksplorasi 7.8 ini bertujuan agar siswa melihat pengaruh besar kecilnya ukuran penyebaran terhadap keragaman data.

Jawaban Ayo Mencoba

1. Anggota Kelompok kedua: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 27, 28, 29, 32, 36

$$\sum x = 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 12 + 27 + 28 + 29 + 32 + 36$$
$$= 192$$
$$\sum x^2 = 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 + 12^2 + 27^2 + 28^2 + 29^2 + 32^2 + 36^2$$
$$= 4982$$
$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{4982}{12} - \left(\frac{192}{12}\right)^2 = 415,2 - (16)^2 = 159,2$$

   Terbukti bahwa rumus kedua memberikan hasil varian yang sama dengan cara pertama.

2. Untuk kelompok ketiga yang beranggotakan 12 orang dan semuanya berusia 16 tahun, maka *mean* = 16 dan nilai varian dan simpangan bakunya = 0.

Kunci Jawaban Latihan 7.5

1. Varian = 4,69 ; simpangan baku = 2,17
2. a. Rata-rata = 37,13

   b. Simpangan baku = 0,86

3. a. *mean* = 3
   b. varian = 0,75
   c. simpangan baku = 0,87
4. *mean* gabungan = 5,44 ; simpangan baku gabungan = 2,35
5. a. *mean* kelompok A = 63,4 ; *mean* kelompok B = 60,2
   b. Guru dari kelas A terlihat lebih baik karena memiliki *mean* yang lebih tinggi. Selain *mean* yang lebih tinggi, ada 29 siswa di kelas A yang nilainya di atas 60. Di kelas B hanya sebanyak 24 siswa yang nilainya di atas 60.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. a. grafik iii   b. grafik iv   c. grafik ii   d. grafik i
2. a. 113
   b. Jono salah mengartikan *line plot*. Tanda X menunjukkan banyaknya keluarga yang memiliki jumlah anggota yang tertera pada sumbu x. Di atas angka 8 hanya ada 1 X, artinya hanya keluarga Jono saja yang memiliki anggota keluarga sebanyak 8 orang.
3. a. *mean* dari 4 ulangan = 80 ; median dari 4 ulangan = 80
   b. memilih median, karena jika nilai ulangan ke-5 nya kurang baik, misalnya menjadi terendah maka median bergeser sedikit ke 79, tidak berubah signifikan.
   c. memilih *mean*, karena jika nilai ulangan ke-5 nya baik, misalnya menjadi yang tertinggi, maka rata-ratanya akan naik menjadi lebih tinggi dari 80.
4. 69,2
5. a. Q_1 = 1, 25% siswa memiliki hari absen kurang dari 1 hari.
   b. Jangkauan Interkuartil = $Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$
   c. 1,51
6. a. *mean* = 46,75
   b. Q_1 = 40,9 ; Q_3 = 54 ; Jangkauan Interkuartil = 13,1
   c. Varian = 102,44 ; simpangan baku = 10,12

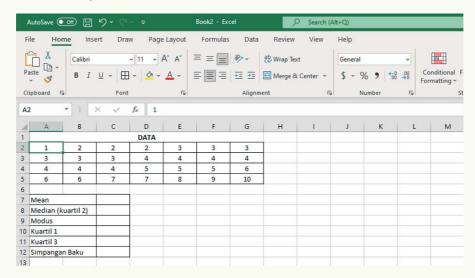
Materi Pengayaan

Penggunaan Aplikasi Excel untuk Menghitung Ukuran Pemusatan, Ukuran Lokasi, dan Ukuran Penyebaran.

Aplikasi excel dapat membantu kita dalam menghitung berbagai ukuran pemusatan, ukuran lokasi dan ukuran penyebaran. Pada bagian penyayaan Bab 7 ini, kita akan menghitung *mean*, modus, median, kuartil bawah (Q_1), kuartil atas (Q_3) dan simpangan baku dari data-data berikut:

1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10

Pertama-tama kita input dulu data-data di atas ke dalam aplikasi excel sehingga terlihat sebagai berikut:

	A	B	C	D	E	F	G
1				DATA			
2	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	5	6
5	6	6	7	7	8	9	10
6							
7	Mean						
8	Median (kuartil 2)						
9	Modus						
10	Kuartil 1						
11	Kuartil 3						
12	Simpangan Baku						

Data diinput mulai dari sel A2, A3, …., dan seterusnya sampai sel G5.

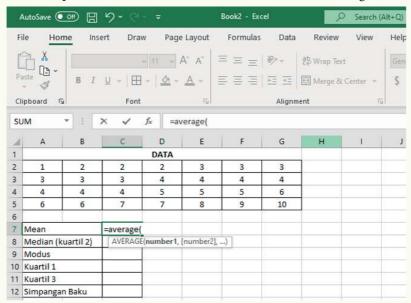
Setelah input data selesai, kita akan menghitung nilai *mean*, median, modus, kuartil 1, kuartil 3 dan simpangan baku.

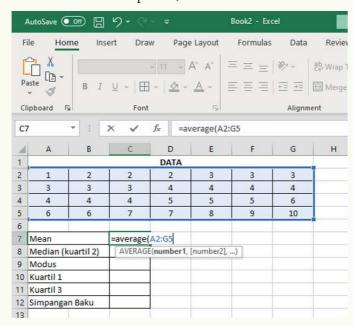
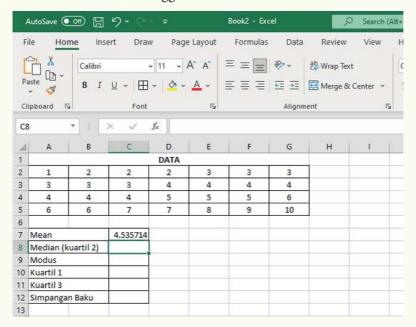
Untuk mempermudah, di layar tampilan excel sudah diberikan tabel, di mana:

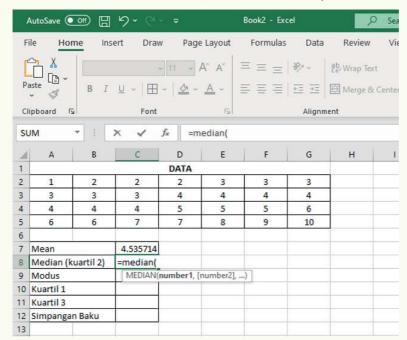
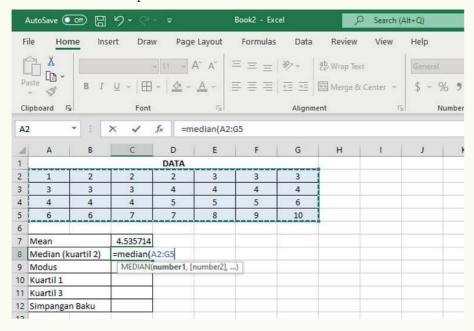
- Sel C7, untuk menghitung hasil *mean* atau rata-rata
- Sel C8, untuk menghitung hasil median atau kuartil 2
- Sel C9, untuk menghitung hasil modus
- Sel C10, untuk menghitung hasil kuartil bawah atau Q_1
- Sel C11, untuk menghitung hasil kuartil atas atau Q_3
- Sel C12, untuk menghitung hasil simpangan baku

Menghitung *mean*/rata-rata menggunakan aplikasi Excel

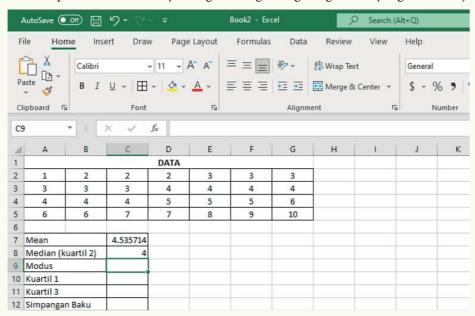
Pertama, pastikan kursor berada di sel C7. Lalu ketik =average(

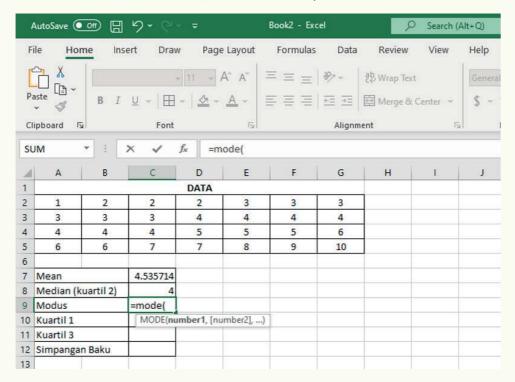
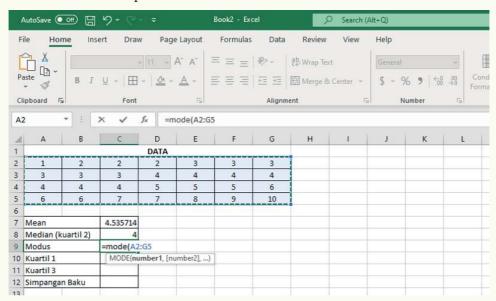
	A	B	C	D	E	F	G
1				DATA			
2	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	5	6
5	6	6	7	7	8	9	10
6							
7	Mean		=average(				
8	Median (kuartil 2)						
9	Modus						
10	Kuartil 1						
11	Kuartil 3						
12	Simpangan Baku						

Lalu sorot sel A2 sampai G5, dimana data-data berada.

	A	B	C	D	E	F	G
1				DATA			
2	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	5	6
5	6	6	7	7	8	9	10
6							
7	Mean		=average(A2:G5				
8	Median (kuartil 2)						
9	Modus						
10	Kuartil 1						
11	Kuartil 3						
12	Simpangan Baku						

Lalu tekan ENTER, sehingga terlihat hasil *mean* di sel C7. Nilai *mean* = 4,53

Menghitung median menggunakan aplikasi Excel

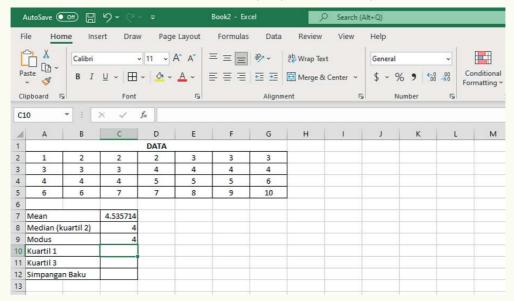
Pastikan kursor berada di sel C8, lalu ketik =median(

Lalu sorot sel A2 sampai G5

Tekan ENTER, maka akan tampil nilai median pada sel C8

Nilai median untuk data-data yang berada di sel A2 sampai G5 adalah 4.

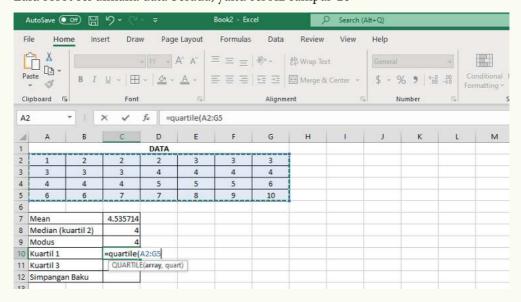
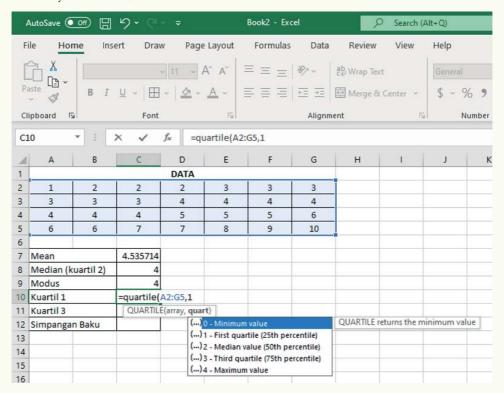
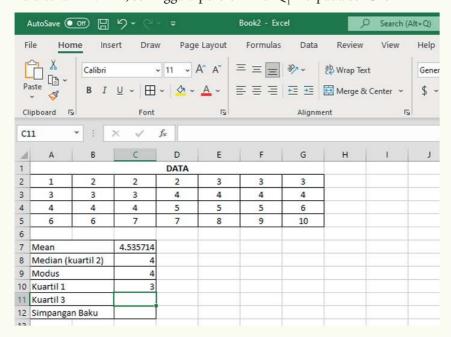
Siswa dapat membuktikannya dengan menghitung dengan cara yang sudah diajarkan.

Menghitung modus menggunakan aplikasi Excel

Pastikan kursor berada di sel C9, lalu ketik =mode(

Lalu sorot sel A2 sampai G5

Tekan ENTER, maka akan tampil nilai median pada sel C9

Nilai modus untuk data-data yang berada di sel A2 sampai G5 adalah 4.

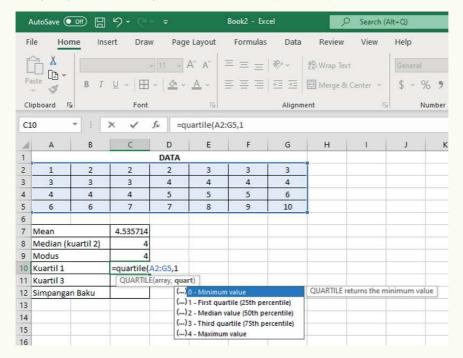
Data bernilai 4, memiliki frekuensi terbanyak yaitu ada sebanyak 7 buah.

Menghitung Kuartil Bawah(Q_1) menggunakan aplikasi Excel

Pastikan kursor berada di sel C10, lalu ketik =quartile(

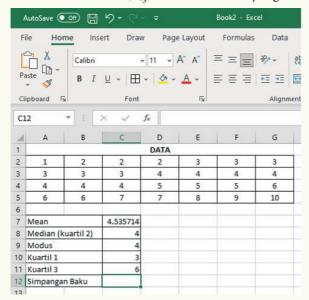
Lalu sorot sel dimana data berada, yaitu sel A2 sampai G5

Lalu lanjutkan ketik,1

Lalu tekan ENTER, sehingga diperoleh nilai $Q_1 = 3$ pada sel C10

Menghitung Kuartil Atas (Q_3) menggunakan aplikasi Excel

Ulangi Langkah-langkah perhitungan kuartil bawah.

Hanya saja setelah menyorot data ketik, 3 seperti tampilan berikut:

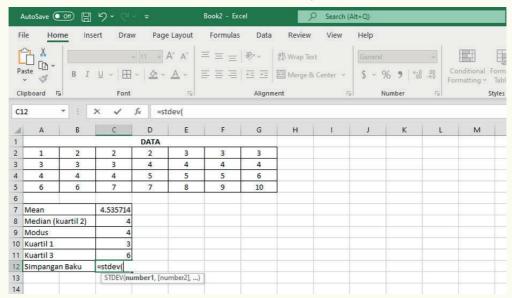
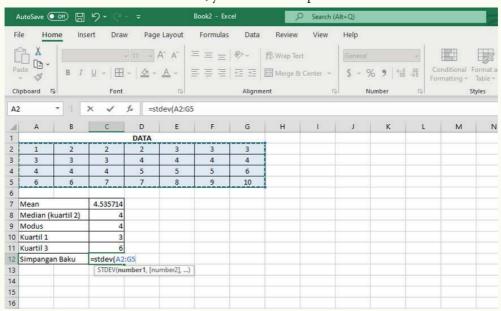
	A	B	C	D	E	F	G
1				DATA			
2	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	5	6
5	6	6	7	7	8	9	10
6							
7	Mean		4.535714				
8	Median (kuartil 2)		4				
9	Modus		4				
10	Kuartil 1		=quartile(A2:G5,1				
11	Kuartil 3						
12	Simpangan Baku						

Tekan ENTER, maka akan tampil nilai Q_3 pada sel C11

Nilai kuartil bawah (Q_3) untuk data-data yang berada di sel A2 sampai G5 adalah 4.

	A	B	C	D	E	F	G
1				DATA			
2	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	5	6
5	6	6	7	7	8	9	10
6							
7	Mean		4.535714				
8	Median (kuartil 2)		4				
9	Modus		4				
10	Kuartil 1		3				
11	Kuartil 3		6				
12	Simpangan Baku						

Menghitung Simpangan Baku (Standar Deviasi) menggunakan aplikasi Excel

Pastikan kursor berada di sel C11, lalu ketik =stdev(

	A	B	C	D	E	F	G
1				DATA			
2	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	5	6
5	6	6	7	7	8	9	10
6							
7	Mean		4.535714				
8	Median (kuartil 2)		4				
9	Modus		4				
10	Kuartil 1		3				
11	Kuartil 3		6				
12	Simpangan Baku		=stdev(				

Lalu sorot sel di mana data berada, yaitu sel A2 sampai G5

	A	B	C	D	E	F	G
1				DATA			
2	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	5	6
5	6	6	7	7	8	9	10
6							
7	Mean		4.535714				
8	Median (kuartil 2)		4				
9	Modus		4				
10	Kuartil 1		3				
11	Kuartil 3		6				
12	Simpangan Baku		=stdev(A2:G5				

Lalu tekan ENTER, sehingga diperoleh nilai simpangan baku atau standar deviasi = 2,1855 pada sel C12

AutoSave Off Book2 - Excel Search (Alt+Q)

File Home Insert Draw Page Layout Formulas Data Review View Help

	A	B	C	D	E	F	G
1				DATA			
2	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	5	6
5	6	6	7	7	8	9	10
6							
7	Mean		4.535714				
8	Median (kuartil 2)		4				
9	Modus		4				
10	Kuartil 1		3				
11	Kuartil 3		6				
12	Simpangan Baku		2.18551				

Latihan

Setelah melihat contoh di atas, siswa dapat berlatih menggunakan aplikasi excel untuk menghitung *mean*, modus, median, kuartil bawah (Q_1), kuartil atas (Q_2) dan simpangan baku dari data-data berikut:

1. 11, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 19, 20
2. 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 14, 14, 16, 18, 20
3. 5, 9, 9, 9, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 15, 15, 15, 17, 17, 17, 19, 19, 21, 23, 25

Data-data kelompok A adalah 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10 dan data-data kelompok B adalah pada soal Latihan pengayaan nomer 1.

Ternyata data-data kelompok B merupakan data-data kelompok A yang ditambahkan 10, minta siswa membandingkan *mean*, modus, median, kuartil bawah (Q_1), kuartil atas (Q_3) dan simpangan baku dari kedua kelompok. Manakah yang berubah dan manakah yang tetap? Dan minta siswa menjelaskan perbedaan yang terjadi.

Solusi:

Yang berubah adalah: *mean*, median, modus, Q_1 dan Q_3

Di mana nilai *mean*, median, modus, Q_1 dan Q_3 dari kelompok B lebih besar 10 dari nilai *mean*, median, modus, Q_1 dan Q_3 kelompok A

Yang tidak berubah adalah simpangan baku atau standar deviasi.

Data-data kelompok A adalah 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10 dan data-data kelompok C adalah pada soal Latihan pengayaan nomer 2.

Ternyata data-data kelompok C merupakan data-data kelompok A yang dikalikan 2, minta siswa membandingkan *mean*, modus, median, kuartil bawah (Q_1), kuartil atas (Q_3) dan simpangan baku dari kedua kelompok. Manakah yang berubah dan manakah yang tetap? Dan minta siswa menjelaskan perbedaan yang terjadi.

Solusi:

Yang berubah adalah: *mean*, median, modus, Q_1, Q_3 dan Standar deviasi

Dimana nilai *mean*, median, modus, Q_1, Q_3 dan standar deviasi dari kelompok C dua kali lebih besar dari nilai *mean*, median, modus, Q_1, Q_3 dan standar deviasi kelompok A.

Data-data kelompok A adalah 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10 dan data-data kelompok D adalah pada soal Latihan pengayaan no.3.

Ternyata data-data kelompok D merupakan data-data kelompok A yang dikalikan 2 lalu ditambah 5, minta siswa membandingkan *mean*, modus, median, kuartil bawah (Q_1), kuartil atas (Q_3) dan simpangan baku dari kedua kelompok. Manakah yang berubah dan manakah yang tetap? Dan minta siswa menjelaskan perbedaan yang terjadi.

Solusi:

Yang berubah adalah: *mean*, median, modus, Q_1, Q_3 dan Standar deviasi

Dimana nilai *mean*, median, modus, Q_1, dan Q_3 dari kelompok D dua kali lebih besar tambah lima dari nilai *mean*, median, modus, Q_1 dan Q_3 kelompok A

Sedangkan nilai standar deviasi dari kelompok C dua kali lebih besar nilai standar deviasi kelompok A.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-537-1

Bab

8

Panduan Khusus

Peluang

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, siswa diharapkan dapat:

1. menentukan ruang sampel sebuah kejadian;
2. membuat distribusi peluang kejadian;
3. membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas;
4. menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas; dan
5. memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas.

Bab Peluang bertujuan mengembangkan kemampuan siswa untuk memahami dan bernalar mengenai peluang atau probabilitas. Siswa akan dapat merepresentasikan ruang sampel untuk kejadian majemuk dengan tabel dan menyatakan dalam bentuk tabel distribusi peluang untuk memahami hasil seragam atau tidaknya setiap hasil dalam percobaan peluang. Mereka membangun pemahaman bagaimana menghitung peluang majemuk berdasarkan peluang sederhana yang sudah dipelajari di SMP. Kejadian majemuk di Kelas 10 mencakup peluang kejadian saling lepas (*mutually exclusive events*) dan tidak saling lepas (*nonmutually excluseive events*) saja. Untuk peluang kejadian majemuk saling bebas (*independent events*) dan tidak saling bebas (*dependent events*) serta peluang kejadian bersyarat (*conditional probability*) akan dibahas di kelas selanjutnya.

Pada subbab A, siswa melakukan eksplorasi melempar dua dadu dengan warna berbeda dan menentukan ruang sampelnya dalam bentuk tabel. Dari tabel, mereka dapat menentukan apakah semua hasil memiliki peluang yang sama (seragam). Berdasarkan ruang sampel, siswa kemudian dapat membuat tabel distribusi peluang yang menunjukkan semua kemungkinan hasil dan peluangnya. Siswa kemudian dapat menggunakan distribusi peluang untuk menemukan aturan penjumlahan untuk dua kejadian saling lepas dan saling tidak lepas melalui eksplorasi 8.2 pada subbab B.

Pemahaman peluang dalam bab ini berkaitan dengan bab Statistika di mana peluang dari berbagai kemungkinan hasil dari data yang sudah dikumpulkan dari sampel populasi dapat digunakan untuk membuat kesimpulan dan prediksi mengenai populasi. Peluang dapat juga digunakan dalam bidang genetika (mata pelajaran biologi) untuk menentukan berbagai kemungkinan dari karakteristik yang diturunkan melalui gen.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode Pembelajaran dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
A. Distribusi Peluang	4	• Menentukan ruang sampel sebuah kejadian • Membuat distribusi peluang kejadian	Distribusi Peluang	Histogram, diagram batang, frekuensi.	*Discovery learning*	Buku Siswa	
B. Aturan Penjumlahan	4	• Membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas • Menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas • Memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas	Kejadian Saling Lepas	Kejadian Saling Lepas, Kejadian Saling Bebas	*Discovery Learning*	Buku Siswa	

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Distribusi Peluang

- Menentukan ruang sampel sebuah kejadian majemuk.
- Membuat distribusi peluang kejadian.

- 2 buah dadu dengan warna yang berbeda jika memungkinkan.
- Uang logam (100, 200, 500, atau 1.000 rupiah).

Perkenalkan bab ini dengan **Pembuka Bab** dan menanyakan siswa kapan konsep peluang muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan dua pertanyaan pemantik dan beri tahu siswa bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap dua pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai peluang.

Gunakan bagian **Mengingat Kembali** mengenai peluang sederhana yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa.

- Ada berapa kemungkinan hasil melempar sebuah dadu normal (6 sisi)?
- Berapa peluang mendapatkan angka 1 dari melempar sebuah dadu?
- Berapa peluang mendapatkan angka 7?
- Berapa peluang mendapatkan salah satu angka dari 1 sampai 6?
- Berapa peluang mendapatkan angka ganjil, angka genap, dan bilangan prima?

Mulai aktivitas pembelajaran dengan jenis-jenis permainan papan apa yang disukai atau pernah dimainkan oleh siswa. Kemudian minta siswa melakukan Eksplorasi 8.1. Mereka dapat menggunakan dadu jika tersedia atau teknologi https://virtualdiceroll.com/2/en/two-dice jika tersedia akses daring. Siswa dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

1. Berikut ini tabel yang sudah dilengkapi.

Angka pada Dadu Putih

Angka pada Dadu Merah		1	2	3	4	5	6
	1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
	2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
	3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
	4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
	5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
	6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Apa arti 3, 2? Apakah berbeda dengan 2, 3? Mengapa?

3, 2 di sini artinya angka 3 pada dadu warna merah dan angka 2 pada dadu warna putih, dan berbeda dengan 2, 3 yaitu angka 2 pada dadu merah dan angka 3 pada dadu putih. Karena warna kedua dadu berbeda, maka urutan menjadi penting.

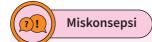
2. Jika dilihat dari tabel, setiap kotak atau hasil berbeda satu sama lain. Misalnya, hanya ada satu cara mendapatkan 5, 4, yaitu dadu merah 5 dan dadu putih 4. Demikian juga untuk setiap kotak, hanya ada satu cara mendapatkan, sehingga peluangnya $\frac{1}{36}$.

   Jika kedua dadu warna sama dan tidak dibedakan mana dadu pertama dan mana dadu kedua, maka urutan tidak menjadi penting dan hasil, misalnya 4, 5 dan 5, 4

dianggap sama. Bagian yang diarsir pada tabel berikut ini tidak lagi diperlukan, dan untuk setiap hasil (kecuali yang angkanya sama) terdapat 2 cara.

Angka pada Dadu Putih

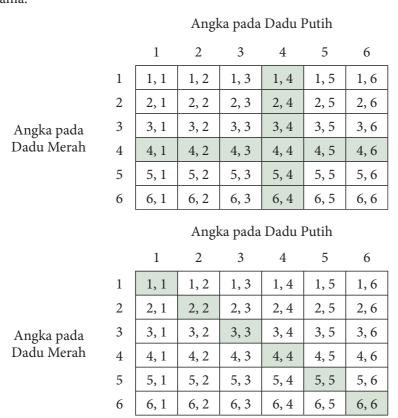
Angka pada Dadu Merah		1	2	3	4	5	6
	1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
	2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
	3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
	4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
	5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
	6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

3. Peluang mendapatkan angka yang sama pada kedua dadu sebenarnya sama besarnya dengan peluang angka yang lain.

Miskonsepsi umum adalah mendapatkan angka yang sama lebih sulit dibandingkan angka yang lain. Seperti yang dapat kita lihat di tabel, peluang mendapat 1, 1 adalah $\frac{1}{36}$, sama seperti peluang mendapatkan yang angkanya tidak sama, misalnya 3, 5, juga adalah $\frac{1}{36}$.

4. Untuk menjawab pertanyaan ini, maka kita melihat tabel dan menghitung semua yang ada setidaknya satu angka 5, yaitu ada 11 seperti yang terlihat di tabel berikut, maka peluangnya adalah $\frac{11}{36}$.

Angka pada Dadu Putih

Angka pada Dadu Merah		1	2	3	4	5	6
	1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
	2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
	3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
	4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
	5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
	6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

5. Peluang mendapatkan setidaknya satu angka 4 adalah $\frac{11}{36}$ dan peluang mendapatkan dua angka yang sama adalah $\frac{6}{36}$. Oleh karena itu, peluang mendapatkan angka 4 lebih besar daripada peluang mendapatkan angka yang sama.

Angka pada Dadu Putih

Angka pada Dadu Merah		1	2	3	4	5	6
	1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
	2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
	3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
	4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
	5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
	6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Angka pada Dadu Putih

Angka pada Dadu Merah		1	2	3	4	5	6
	1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
	2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
	3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
	4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
	5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
	6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Pada bagian eksplorasi, biarkan siswa mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka mulai memikirkan bagaimana cara menggunakan tabel hasil kemungkinan untuk mulai memikirkan peluang kejadian tertentu.

Metode & Aktivitas Pembelajaran

Kaitkan hasil eksplorasi siswa dengan **penjelasan konsep** dan tampilkan contoh-contoh bagaimana menentukan peluang berdasarkan tabel ruang sampel. Khususnya, arahkan perhatian siswa pada penggunaan "**dan**" dan "**atau**" pada contoh-contoh tersebut. Minta siswa membandingkan kembali dengan hasil mereka pada eksplorasi, dan diskusikan jika masih ada yang masih belum jelas atau membingungkan.

Mintalah siswa mengerjakan Latihan 1 untuk memeriksa pemahaman mereka. Mereka dapat mengacu pada tabel ruang sampel yang sudah dibuat sebelumnya untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut.

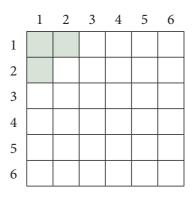
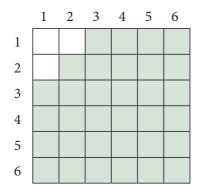
Diferensiasi

Bagi siswa yang mengalami kesulitan, minta siswa membuat tabel seperti berikut ini, kemudian mengarsir untuk jumlah 2 menggunakan satu warna dan jumlah 3 dengan warna lain. Tanyakan, “Untuk jumlah 2 **atau** jumlah 3 maka apakah kalian menggabungkan keduanya atau mencari irisan yang memenuhi dua-duanya?” Arahkan siswa untuk melihat bahwa untuk “**atau**” maka cukup salah satu dipenuhi sehingga untuk menghitung peluang jumlah hasil yang diinginkan merupakan gabungan dari kedua kejadian. Lakukan yang serupa untuk soal-soal berikutnya, namun kurangi bantuan atau arahan yang diberikan sehingga siswa dapat mandiri mengerjakannya.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab, baik sendiri maupun oleh teman yang juga memiliki kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

Kunci Jawaban Latihan 8.1

a. $\frac{3}{36} = 0,083$

b. $\frac{33}{36} = 0,917$

Jelaskan bagian Distribusi Peluang, dan berikan contoh mengisi dua baris pertama dari tabel distribusi peluang, dan meminta siswa melengkapi. Berikut tabel yang sudah dilengkapi.

Jumlah	Peluang
2	$\frac{1}{36} = 0,028$
3	$\frac{2}{36} = 0,056$
4	$\frac{3}{36} = 0,083$
5	$\frac{4}{36} = 0,111$

6	$\frac{5}{36} = 0,139$
7	$\frac{6}{36} = 0,167$
8	$\frac{5}{36} = 0,139$
9	$\frac{4}{36} = 0,111$
10	$\frac{3}{36} = 0,083$
11	$\frac{2}{36} = 0,056$
12	$\frac{1}{36} = 0,028$
Jumlah	$\frac{36}{36} = 1,000$

Setelah melengkapi tabel distribusi peluang, minta siswa menjawab dua pertanyaan berikut:

a. Berapa jumlah dari semua peluang?
   Jawaban: Jumlah dari semua peluang adalah 1.

b. Bagaimana kalian dapat menggunakan tabel distribusi peluang untuk mencari peluang pada Latihan Sekarang 1?

   Jawaban:

   a) Peluang jumlah 2 atau 3:

   b) Peluang lebih besar dari 3 = 0,083 + 0,111 + 0,139 + 0,167 + 0,139 + 0,111 + 0,083 + 0,056 + 0,028 = 0,916 (atau bisa juga menggunakan peluang komplementer, yaitu 1 – peluang kejadian sebaliknya, 1 – 0,083 = 0,917

   c) Peluang jumlah setidaknya 3 = 1 – peluang kurang dari 3 = 1 – 0,028 = 0,972

   d) Peluang jumlah lebih kecil dari 3 = peluang jumlah 2 = 0,028

Tunjukkan dan jelaskan kepada siswa bagaimana dengan menggunakan tabel distribusi peluang dapat membantu menentukan peluang, kemudian minta siswa mengerjakan Latihan 2 untuk memeriksa pemahaman mereka.

Kunci Jawaban Latihan 8.2

1. a.

Angka pada Dadu Putih

Angka pada Dadu Merah	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Angka yang Lebih Besar	Peluang
1	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{11}{36}$
Jumlah	$\frac{36}{36} = 1$

1. b. Peluang angka yang lebih besar adalah 3 = $\frac{5}{36}$.

Peluang angka yang lebih besar adalah 2 atau 3 = $\frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36}$.

Peluang angka yang lebih besar adalah 3 atau kurang = $\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36}$.

Peluang angka yang lebih besar adalah lebih dari 3 = $\frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{27}{36}$ atau $1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$.

2. a.

		Angka pada Dadu Putih					
		1	2	3	4	5	6
Angka pada Dadu Merah	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

Nilai Mutlak dari Selisih Dua Dadu	**Peluang**
0	$\frac{6}{36}$
1	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{8}{36}$
3	$\frac{6}{36}$
4	$\frac{4}{36}$
5	$\frac{2}{36}$
Jumlah	$\frac{36}{36} = 1$

2. b. Peluang nilai mutlak selisih adalah 3 = $\frac{6}{36}$.

Peluang nilai mutlak selisih adalah 2 atau 3 = $\frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{14}{36}$.

Peluang nilai mutlak selisih adalah setidaknya 2 = $\frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{20}{36}$.

Peluang nilai mutlak selisih adalah tidak lebih dari 2 = $\frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{24}{36}$.

Diferensiasi

Bagi siswa yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan bagian **Mandiri** dan/atau bagian **Bernalar** tanpa bantuan, dan minta mereka untuk memikirkan pertanyaan-pertanyaan yang dapat diajukan untuk kejadian melempar dua uang logam. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi siswa yang mengalami kesulitan.

Ayo Berefleksi

Kunci Jawaban

Ruang Sampel

		Uang Logam 2	
		G	A
Uang Logam 1	G	GG	GA
	A	AG	AA

Distribusi Peluang

Jumlah Gambar	**Peluang**
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{4}$
2	$\frac{1}{4}$

Ayo Berpikir Kritis

Kunci Jawaban

Jika ada waktu, minta siswa mengerjakan Ayo Berpikir Kritis secara mandiri, berpasangan, atau dalam kelompok.

Untuk menjawab pertanyaan berpikir kritis, siswa dapat membuat tabel ruang sampel seperti di bawah ini dan mengarsir hasil perkalian yang genap. Langsung terlihat bahwa jumlah hasil perkalian genap lebih banyak dibandingkan dengan hasil perkalian yang ganjil, sehingga siswa harus setuju dengan pernyataan dari temannya.

		Dadu 2					
		1	2	3	4	5	6
Dadu 1	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36

Alternatif Penyelesaian:

Siswa dapat juga bernalar bahwa jumlah angka ganjil dan angka genap pada dadu sama banyaknya (masing-masing ada tiga angka), namun mereka tahu bahwa:

Ganjil × Ganjil = Ganjil
Ganjil × Genap = Genap
Genap × Ganjil = Genap
Genap × Genap = Genap

Oleh karena lebih banyak kasus yang hasilnya genap, maka pasti jumlah hasil perkalian yang merupakan bilangan genap akan lebih banyak dari hasil perkalian yang merupakan bilangan ganjil.

Kunci Jawaban

Bagian ini dapat digunakan sebagai batu loncatan untuk mengajak siswa memikirkan berbagai miskonsepsi yang biasanya muncul di dalam memahami konsep peluang. Aktivitas ini dapat dilakukan bersama di dalam kelas jika waktu memungkinkan, atau dapat di-*posting* sebagai diskusi daring.

Siswa seharusnya setuju dengan siswa C dan D, dengan alasan berikut.

- Siswa A perlu membedakan antara peluang teoretis dan peluang empiris. Secara teoretis memang peluang mendapatkan gambar dan angka ketika melemparkan uang logam adalah masing-masing $\frac{1}{2}$. Sebaliknya, secara empiris, atau percobaan, belum tentu mendapatkan tepat $\frac{1}{2}$, namun dengan semakin besar percobaan yang dilakukan, maka hasilnya akan semakin mendekati $\frac{1}{2}$, sebagaimana dinyatakan oleh siswa D.
- Siswa B memiliki miskonsepsi yang umum terdapat yaitu menganggap bahwa hasil kejadian sebelumnya akan memengaruhi hasil kejadian selanjutnya walaupun sebenarnya kejadian saling bebas (*independent events*). Di sini, peluang mendapatkan angka tetap $\frac{1}{2}$ karena dari dua hasil yang mungkin hanya ada satu kemungkinan mendapatkan angka, terlepas dari hasil kejadian sebelumnya adalah gambar, sebagaimana dinyatakan oleh siswa C.

Sebagai penutup dari pembelajaran subbab ini, ajak siswa untuk merefleksikan apa yang sudah mereka pelajari melalui dua pertanyaan.

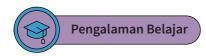
- Apa perbedaan antara ruang sampel dan distribusi peluang?

  Sampel Jawaban: *Ruang sampel menyatakan himpunan dari semua hasil yang mungkin dalam percobaan peluang, sedangkan distribusi peluang menyatakan peluang terjadinya masing-masing hasil. Ruang sampel berupa himpunan, sedangkan distribusi peluang berupa angka tunggal.*
- Mengapa hasil dari ruang sampel melempar dua dadu sama kemungkinannya?

  Sampel Jawaban: *Hasil dari ruang sampel melempar dua dadu sama kemungkinannya karena kejadian dadu pertama tidak memengaruhi dadu kedua. Terdapat 36 elemen dalam himpunan ruang sampel sehingga setiap hasil memiliki peluang yang sama yaitu* $\frac{1}{36}$. *Asumsi di sini adalah kejadian* $1, 2$ *berbeda dengan kejadian* $2, 1$.

Aktivitas ini dapat dilakukan secara bersamaan dengan melakukan *Think-Pair-Share*, yaitu meminta masing-masing siswa memikirkan jawaban pertanyaan refleksi tersebut, kemudian berpasangan saling membagikan jawaban, memodifikasi jawaban sesuai hasil berbagi dengan pasangan, dan kemudian menyampaikan di kelas. Guru dapat melakukan penilaian formatif berdasarkan jawaban dari siswa sehingga dapat menekankan kembali konsep utama sesuai dengan tujuan pembelajaran, atau memperbaiki miskonsepsi yang masih dimiliki oleh siswa.

Aktivitas ini juga dapat dilakukan secara mandiri oleh individu siswa dengan menuliskan dalam jurnal refleksi mereka jika waktu yang tersedia singkat dan tidak memungkinkan untuk mengadakan diskusi bersama. Guru kemudian dapat mengumpulkan hasil refleksi dan memberikan umpan balik terhadap pemahaman masing-masing siswa.

B. Aturan Penjumlahan

- Membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas.
- Menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas.
- Memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas.

Mengingatkan kepada siswa apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai ruang sampel dan distribusi peluang. Jika guru meminta siswa menuliskan refleksi di jurnal, maka dapat menekankan kembali hal-hal yang siswa masih belum terlalu jelas sebagaimana tecermin dalam refleksi mereka. Gunakan bagian **Mengingat Kembali** mengenai peluang sederhana yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan siswa.

Perkenalkan eksplorasi 8.2 dengan membacakan atau meminta salah seorang siswa membacakan paragraf pembuka dari eksplorasi. Tekankan pertanyaan pemantik "*Dalam kondisi apa kalian dapat menjumlahkan masing-masing peluang kejadian untuk menentukan peluang dari kejadian yang berhubungan?*" yang akan dijawab melalui pembelajaran subbab ini.

Tanyakan kepada siswa siapa yang menggunakan satu moda transportasi ke sekolah dan siapa yang menggunakan lebih dari satu moda transportasi ke sekolah. Minta mereka memikirkan cara mengumpulkan informasi dari kelas mereka secara efisien. Setelah mendaftar berbagai cara mengumpulkan data, minta siswa untuk *voting* menentukan cara yang akan mereka gunakan.

Berikut ini beberapa metode pengumpulan data yang bisa diusulkan jika siswa kesulitan memikirkan cara.

Tekankan bahwa ada dua tabel. Tabel yang pertama adalah moda transportasi yang mereka gunakan hari itu. Jika siswa menggunakan lebih dari satu, pilih yang moda transportasi dengan jarak terpanjang. Jika ada pilihan lain yang tidak ada di tabel, bisa ditambahkan. Tabel yang kedua siswa mencatat semua moda transportasi yang biasa mereka gunakan, sehingga boleh lebih dari satu.

Setelah siswa sudah berhasil mengumpulkan data, minta mereka menuliskan hasilnya di papan atau jika guru menggunakan *PowerPoint* dan proyektor, maka dapat ditambahkan di tabel yang sudah disediakan sebelumnya.

Jelaskan pengertian kata "atau" yang digunakan dalam matematika, khususnya konteks peluang.

Miskonsepsi

Tekankan perbedaan dari penggunaan kata "atau" dalam kehidupan sehari-hari dengan dalam peluang. Dalam penggunaan sehari-hari, ketika ditanyakan, "Kamu mau jeruk ATAU pisang?" artinya diberikan pilihan salah satu dan bukan dua-duanya. Berbeda dengan penggunaan dalam peluang, di mana ketika ditanya, "Berapa siswa yang menggunakan sepeda atau menggunakan motor ke sekolah?" maka baik siswa yang menggunakan sepeda saja, menggunakan motor saja, atau menggunakan keduanya akan dihitung.

Minta siswa mendiskusikan pertanyaan-pertanyaan pada eksplorasi 8.2 dengan pasangan atau anggota kelompok lainnya. Kemudian minta beberapa pasang siswa atau kelompok mempresentasikan hasil diskusi mereka. Jika ada perbedaan pendapat antarsiswa, tidak perlu diselesaikan karena ini hanya merupakan pemicu. Bagian selanjutnya, yaitu Penjelasan Konsep dan Contoh-Contoh akan mengarahkan mereka pada jawaban yang benar.

Sampel Jawaban Ekplorasi 8.2

1. a. Pertanyaan ini dapat dijawab dari tabel. Tambahkan jumlah siswa yang menggunakan sepeda dan jumlah siswa yang menggunakan motor pada tabel pertama, kemudian dibagi dengan total jumlah siswa.
   b. Pertanyaan ini tidak dapat dijawab dari tabel.
2. Pertanyaan 1.b. tidak dapat dijawab karena ada kemungkinan siswa yang terhitung di kedua katergori moda transportasi tersebut. Informasi yang dibutuhkan adalah berapa siswa yang menggunakan baik sepeda maupun motor.

Penjelasan Konsep dan Contoh-Contoh

Berikan penjelasan mengenai kejadian saling lepas melalui contoh tabel data yang sudah dikumpulkan. Kemudian minta siswa berpikir soal pada Ayo Bernalar, pertama secara mandiri, kemudian berbagi dengan pasangan atau kelompok. Minta satu siswa/pasangan/kelompok menyampaikan hasil penalaran mereka dan siswa/pasangan/kelompok lain boleh menyetujui atau tidak menyetujui serta mempertanyakan hasil yang dipresentasikan. Pastikan argumen yang diberikan masuk akal dan sesuai dengan pengertian dari kata “atau” dalam matematika.

Jawaban Ayo Bernalar

a. Kejadian saling lepas karena tidak mungkin mendapatkan jumlah 7 dari dua angka yang sama.
b. Kejadian tidak saling lepas karena mendapatkan jumlah 8 dapat terjadi pada saat yang bersamaan mendapatkan angka yang sama (4, 4).
c. Kejadian saling lepas karena Abi tidak mungkin menggunakan mobil dan kendaraan umum pada saat yang bersamaan (asumsi dia hanya menggunakan satu moda transportasi sekali jalan).
d. Kejadian tidak saling lepas karena keduanya dapat terjadi pada saat yang bersamaan, yaitu hari ini Zain menggunakan motor dan biasanya menggunakan sepeda.

Bimbing siswa melalui pertanyaan-pertanyaan pada bagian A mengenai dua kejadian A dan B saling lepas.

1. Gambar yang di sebelah kanan menggambarkan situasi dua kejadian yang saling lepas.
2. Karena pada gambar kedua lingkaran A dan B tidak beririsan, maka peluang

bahwa A dan B terjadi adalah 0. $P(A \cap B) = 0$.

3. Untuk kasus dua kejadian yang saling lepas, peluang terjadinya A atau B, $P(A \cup B)$, adalah gabungan atau penjumlahan dari masing-masing peluang terjadinya A dan peluang terjadinya B, atau $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Bimbing siswa melalui pertanyaan-pertanyaan pada bagian B mengenai dua kejadian A dan B tidak saling lepas.

4. Diagram yang sebelah kiri menggambarkan dua kejadian yang tidak saling lepas.
5. Peluang terjadinya A dan B digambarkan oleh daerah yang merupakan irisan antara lingkaran A dan lingkaran B.
6. Untuk kasus dua kejadian yang tidak saling lepas, maka peluang terjadinya A atau B merupakan gabungan atau penjumlahan dari masing-masing peluang terjadinya A dan peluang terjadinya B, tetapi perlu dikurangi dengan daerah yang merupakan irisan antara keduanya, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Minta beberapa siswa untuk menjelaskan kembali perbedaan antara dua kejadian saling lepas dan dua kejadian tidak saling lepas.

Minta siswa mengerjakan Latihan 8.3. Pertanyaan yang diberikan terstruktur dengan pertanyaan bantuan yang semakin dikurangi dengan harapan siswa menjadi lebih mandiri. Ingatkan siswa dapat menggunakan tabel ruang sampel untuk lemparan dua dadu yang sudah dibuat pada eksplorasi 1.

Kunci Jawaban Latihan 8.3

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1. Peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 5. Dua kejadian ini saling lepas seperti dapat dilihat pada kedua tabel di atas yang menunjukkan hasil angka sama dan yang berjumlah 5. Peluang mendapatkan angka sama adalah, $P(A) = \frac{6}{36}$. Peluang mendapatkan jumlah 5 adalah, $P(B) = \frac{4}{36}$. Oleh karena itu, peluang mendapatkan angka yang sama atau berjumlah 5 adalah, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. Peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 2 merupakan kejadian yang tidak saling lepas, sehingga $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
$P(A) = \frac{6}{36}, P(B) = \frac{1}{36}, P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Oleh karena itu,
$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = \frac{6}{36}$.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

3. Peluang bahwa nilai mutlak dari selisih adalah 2 atau mendapatkan jumlah 5. Kedua kejadian ini saling lepas seperti terlihat pada tabel ruang sampel di atas. Kita juga bisa bernalar bahwa pasangan bilangan yang membentuk 5 adalah 1, 4 dan 2, 3, yang mana nilai mutlak dari selisihnya bukan 2, maka peluangnya adalah, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{36} + \frac{4}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.
4. Peluang bahwa nilai mutlak dari selisih adalah 2 atau mendapatkan jumlah 11 adalah $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{36} + \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ karena kedua kejadian adalah saling lepas.

Tutup pembelajaran dengan meminta siswa melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi dan berpikir kreatif.

Apa perbedaan dua kejadian yang saling lepas dan yang tidak saling lepas berdasarkan aturan penjumlahannya? Mengapa?

Perbedaan antara dua kejadian yang saling lepas dan yang tidak saling lepas adalah ada atau tidaknya peluang terjadi dua-duanya pada saat bersamaan, atau $P(A \cap B)$.

Berikan sebuah contoh dua kejadian yang saling lepas yang berbeda dengan yang dieksplorasi.

Jawaban variatif.

Latihan 8.4

Sebagai pekerjaan rumah, minta siswa mengerjakan Latihan 8.4. Pilih soal dari 3 kategori: Soal Pemahaman, Soal Aplikasi, dan Soal Penalaran. Berikan siswa yang masih kesulitan dalam pemahaman lebih banyak dari Soal Pemahaman dan Soal Aplikasi. Untuk siswa dengan kecepatan belajar tinggi, berikan lebih banyak dari Soal Penalaran.

Sebagai Contoh:

- Siswa dengan kesulitan belajar: #1, 2, 3, 4, 6, 10
- Siswa biasa: #1, 4, 5, 6, 7, 10
- Siswa kecepatan belajar tinggi: 4, 5, 7, 8, 9, 10

Kunci Jawaban Latihan 8.4

1. a. {(G, G, G), (G, G, A), (G, A, G), (A, G, G), (G, A, A), (A, G, A), (A, A, G), (A, A, A)}

   b. Ya. Masing-masing hasil di dalam ruang sampel ini sama besar kemungkinan terjadinya karena memiliki peluang yang sama, yaitu .

   c.

Jumlah gambar	Peluang
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

$$P\,(\text{tepat 2 gambar}) = \frac{3}{8}$$
$$P\,(\text{tepat banyak 2 gambar}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

2. a. Saling lepas karena jika salah satu dadu adalah angka 6, maka jumlahnya pasti lebih dari 6.

   b. Saling lepas karena harus tepat 5 dan tepat 3.

   c. Tidak saling lepas karena setidaknya 3 tercakup dalam setidaknya 5 sehingga ada irisan antara dua kejadian.

3. a. $P\,(\text{jumlah 6 atau satu 6}) = P\,(\text{jumlah 6}) + P\,(\text{satu enam}) = \frac{5}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}$

   b. $P\,(\text{jumlah 6 atau angka sama}) = P\,(\text{jumlah 6}) + P\,(\text{satu enam}) -$

   $P\,(\text{jumlah 6 dan angka sama}) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36}$.

4. a.

	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

   b. 16 hasil kemungkinan dan sama besar kemungkinannya.

   c.

	1	2	3	4
1	0	-1	-2	-3
2	1	0	-1	-2
3	2	1	0	-1
4	3	2	1	0

Selisih	**Peluang**
-3	$\frac{1}{16}$
-2	$\frac{2}{16}$
-1	$\frac{3}{16}$
0	$\frac{4}{16}$

1	$\frac{3}{16}$
2	$\frac{2}{16}$
3	$\frac{1}{16}$

d. Selisih 0

e. $\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}=\frac{15}{16}$ atau $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

5. a.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)

b. Ada 24 hasil kemungkinan dan semua sama besar kemungkinannya.

c.

Jumlah	Peluang
2	$\frac{1}{24}$
3	$\frac{2}{24}$
4	$\frac{3}{24}$
5	$\frac{4}{24}$
6	$\frac{4}{24}$
7	$\frac{4}{24}$
8	$\frac{3}{24}$
9	$\frac{2}{24}$
10	$\frac{1}{24}$

d. Jumlah 5, 6, 7 memiliki peluang paling besar yaitu masing-masing $\frac{4}{24}$.

e. $\frac{1}{24}+\frac{2}{24}=\frac{3}{24}$

6. a. Saling lepas. $P=\frac{2}{16}+\frac{4}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

   b. Saling lepas. $P=\frac{4}{16}+\frac{4}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

   c. Tidak saling lepas. $P=\frac{4}{16}+\frac{4}{16}-\frac{4}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

   d. Tidak saling lepas. $P=\frac{4}{16}+\frac{3}{16}-\frac{1}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

7. a. Peluang mendapatkan angka yang sama untuk lemparan pertama adalah $\frac{1}{6}$ yang merupakan kemungkinan yang cukup kecil. Demikian juga peluang mendapatkan angka yang sama pada lemparan kedua adalah $\frac{1}{6}$. Sangat tidak masuk akal jika peluang mendapatkan dua hasil ini menjadi lebih besar. **Untuk guru: dua kejadian ini disebut saling bebas, dan akan dipelajari di kelas 11.**

   b. Cara berpikir sama dengan 7a yaitu sangat tidak masuk akal jika peluangnya menjadi 1, yang artinya pasti terjadi. Padahal, justru kemungkinannya seharusnya semakin kecil mendapatkan angka yang sama berturut-turut sebanyak 6 kali.

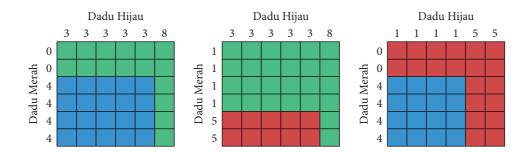
8. a. {(GGGG), (GGGA), (GGAG), (GAGG), (AGGG), (GGAA), (GAGA), (GAAG), (AGGA), (AGAG), (AAGG), (GAAA), (AGAA), (AAGA), (AAAG), (AAAA)}

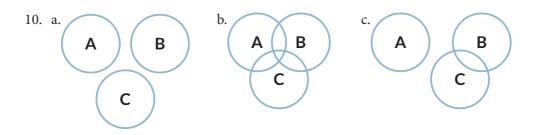
   b. Ya

   c.

Jumlah Gambar	Peluang
0	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{6}{16}$
3	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$

   d. $P\,(\text{tepat 2 gambar})=\frac{6}{16}$; $P\,(\text{paling banyak 2 gambar})=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}-\frac{6}{16}=\frac{11}{16}$.

9. Untuk menentukan dadu mana yang memiliki peluang lebih besar menang, dapat dibuat tabel-tabel sebagai berikut:

Jika teman memilih dadu biru, maka dadu merah memiliki peluang lebih besar untuk menang. Jika teman memilih dadu hijau, maka dadu biru memiliki peluang lebih besar untuk menang. Jika teman memilih dadu merah, maka dadu hijau memiliki peluang lebih besar untuk menang. Kejutannya adalah tidak ada satu dadu yang pasti selalu menang.

10. a. b. c.

d. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

e. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

f. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) -$

$P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Refleksi

Di akhir pembelajaran bab ini, minta siswa untuk memikirkan kembali apa saja yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan penuntun sebagai upaya guru untuk memastikan bahwa siswa sudah mencapai tujuan pembelajaran. Uji Kompetensi juga diberikan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran dari bab ini.

a. Apa itu distribusi peluang?

b. Apa itu kejadian yang saling lepas? Berikan contoh dua kejadian yang saling lepas. Berikan dua contoh kejadian yang tidak saling lepas.

c. Bagaimana menentukan $P(A \text{ atau } B)$ ketika A dan B saling lepas? Ketika tidak saling lepas?

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. a. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(4) = \frac{1}{6}$

   b. $P(4 \text{ atau lebih}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   c. $P(4 \text{ atau lebih}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   d. $P(\text{bilangan genap}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. a.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)
7	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)	(7, 7)	(7, 8)
8	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)	(8, 7)	(8, 8)

b.

Jumlah	Peluang
2	$\frac{1}{64}$
3	$\frac{2}{64}$
4	$\frac{3}{64}$
5	$\frac{4}{64}$
6	$\frac{5}{64}$
7	$\frac{6}{64}$
8	$\frac{7}{64}$
9	$\frac{8}{64}$
10	$\frac{7}{64}$
11	$\frac{6}{64}$
12	$\frac{5}{64}$
13	$\frac{4}{64}$
14	$\frac{3}{64}$
15	$\frac{2}{64}$
16	$\frac{1}{64}$

c. $P(8) = \frac{7}{64}; P(\text{setidaknya } 8) = \frac{43}{64}$

d.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	1	0	1	2	3	4	5	6
3	2	1	0	1	2	3	4	5
4	3	2	1	0	1	2	3	4
5	4	3	2	1	0	1	2	3
6	5	4	3	2	1	0	1	2
7	6	5	4	3	2	1	0	1
8	7	6	5	4	3	2	1	0

Jumlah	Peluang
0	$\frac{8}{64}$
1	$\frac{14}{64}$
2	$\frac{12}{64}$
3	$\frac{10}{64}$
4	$\frac{8}{64}$
5	$\frac{6}{64}$
6	$\frac{4}{64}$
7	$\frac{2}{64}$

e. $P\,(\text{selisih } 6) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}; P\,(\text{setidaknya } 6) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

3. a. Saling bebas: $P\,(\text{angka sama atau jumlah } 7) = P\,(\text{angka sama}) + P\,(\text{jumlah } 7)$

$$= \frac{8}{64} + \frac{6}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

b. Tidak saling bebas: $P\,(\text{angka sama atau jumlah } 8) = P\,(\text{angka sama}) +$ $P\,(\text{jumlah } 8) - P\,(\text{angka sama dan jumlah } 7) = \frac{8}{64} + \frac{7}{64} - \frac{1}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$

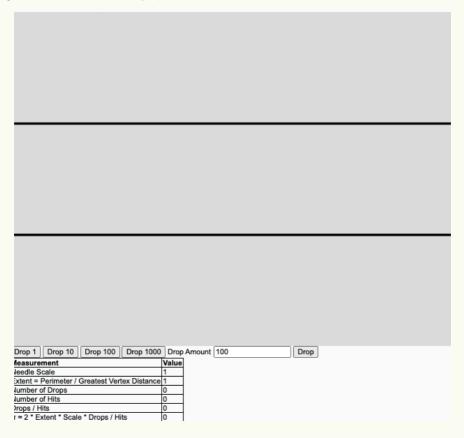
c. Saling bebas: $P\,(\text{jumlah 7 atau jumlah } 8) = P\,(\text{jumlah } 7) + P\,(\text{jumlah } 8)$

$$= \frac{6}{64} + \frac{7}{64} = \frac{13}{32}$$

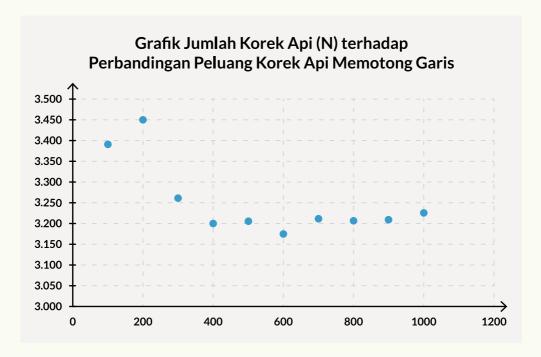
Materi Pengayaan

Proyek ini bersifat opsional dan dapat diberikan sebagai tugas tambahan jika siswa memiliki akses komputer dengan aplikasi *Microsoft Excel* atau sejenisnya. Proyek ini dapat dilakukan secara mandiri atau berkelompok.

Jelaskan tujuan proyek dan pastikan semua siswa mengerti setiap langkah yang harus dilakukan. Berikan kesempatan bagi siswa untuk bertanya untuk mengklarifikasi apa yang perlu dilakukan. Jika siswa belum terlalu biasa menggunakan aplikasi *Microsoft Excel*, ambil waktu untuk menjelaskan singkat bagaimana menggunakan aplikasi tersebut atau meminta mereka mengikuti tutorial yang terdapat pada *YouTube*, misalnya https://www.youtube.com/watch?v=VlAnAk3ONmE.

Siswa atau kelompok dapat diminta menuliskan laporan atau mempersiapkan presentasi kelas. Sebagai alternatif, siswa dapat juga menggunakan aplikasi simulasi daring untuk melakukan percobaan: https://mste.illinois.edu/activity/buffon/. Tekan tombol "Drop 100" dan catat hasil pada "Number of Hits". Ulangi menekan tombol yang sama dan catat hasilnya pada tabel.

Kunci Jawaban

Hasil percobaan akan berbeda-beda untuk setiap siswa atau kelompok. Berikut ini data sebagai contoh perhitungannya dan kemungkinan bentuk grafiknya.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Jumlah dijatuhkan (N)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2	Jumlah korek memotong/menyentuh garis (n)	59	116	184	250	312	378	436	499	561	620
3	Peluang memotong garis (p = $\frac{n}{N}$)	0,590	0,580	0,613	0,625	0,624	0,630	0,623	0,624	0,623	0,620
4	$\frac{2}{p}$	3,390	3,448	3,261	3,200	3,205	3,175	3,211	3,206	3,209	3,226

Nilai $\frac{2}{p}$ seharusnya semakin mendekati nilai π, yaitu sekitar 3,14. Jika pada percobaan dan grafik yang dibuat belum terlihat nilai $\frac{2}{p}$ mendekati nilai π, minta siswa melanjutkan percobaan atau menggunakan simulasi daring.

Bagi siswa yang memiliki kemampuan tinggi, dapat meminta mereka menjelaskan mengapa nilai tersebut mendekati nilai π. Penjelasan dapat dilihat di https://mste.illinois.edu/activity/buffon/.

Indeks

A

Abad ke-21 iv, 2, 6, 248
Akar-akar persamaan kuadrat 156, 167
Aturan penjumlahan 213, 214, 215, 228

B

Barisan aritmetika 57, 68
Barisan bilangan 58, 60
Barisan geometri 57, 78
Bentuk akar 15, 16, 17, 34, 36, 55, 115

C

Capaian pembelajaran 3
Clinometer 125, 133
Covid-19 18, 69, 188

D

Dadu 214, 216, 217, 218, 219, 223, 224, 226, 227, 231, 235, 237, 238
Deret aritmetika vii, 56, 68
Deret bilangan 3, 56, 68, 69, 73
Deret geometri 55, 56, 57, 58, 69, 71, 72, 73, 82
Deret geometri tak hingga 55, 56, 57, 58, 71, 72, 82
Deret geometri tak hingga divergen 72
Deret tak hingga konvergen 73
Desmos 12, 25, 138, 146, 181, 248
Diskriminan 167, 169, 170
Diskusi 2, 5, 17, 18, 21, 38, 39, 40, 57, 59, 86, 87, 95, 98, 102, 108, 120, 127, 128, 139, 159, 189, 199, 207, 208, 217, 226, 228, 229
Distribusi peluang 213, 214, 215, 216, 221, 222, 227, 228, 238

E

Eksponen vi, 15, 16, 17, 18, 20, 24, 42, 50, 115
- Bentuk akar 15, 16, 17, 34, 36, 55, 115
- Bilangan pokok 38, 42, 50
- Fungsi eksponen 15, 16, 17, 24, 25, 26, 29, 34, 38, 39, 55, 115, 156, 159
- Peluruhan eksponen 16, 30, 34, 38
- Pertumbuhan eksponen 16, 27, 30, 38, 50

Evaluasi iii, 13

F

Flipped Classroom 5, 14, 248
Fungsi kuadrat vii, viii, 3, 4, 27, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 164, 165, 167, 169, 170, 171, 174, 175, 177, 179, 181, 182
- Akar-akar persamaan kuadrat 156, 167
- Diskriminan 167, 169, 170
- Titik potong dengan sumbu y 165
- Titik puncak 156, 157, 174, 175, 176
- Terbuka ke atas 156, 160, 163, 164, 165, 167, 169, 170
- Terbuka ke bawah 160, 163, 165, 166, 168, 169, 170
- Titik potong dengan sumbu x 167, 177

G

GeoGebra 12, 18, 25, 32, 78, 90, 91, 100, 107, 126, 138, 146, 159, 177

H

Hasil belajar vi, 13, 272

K

Karakter 7, 249, 272, 278
Kejadian 156, 190, 213, 214, 215, 216, 219, 220, 222, 225, 227, 228, 230, 231, 232, 233, 235, 237, 239
  Saling lepas 213, 214, 215, 228, 230, 231, 232, 233, 235, 237, 239
  Tidak saling lepas 213, 214, 215, 228, 230, 231, 232, 233, 239
Kejadian saling lepas 213, 214, 215, 228, 230, 231
Kemungkinan 4, 33, 104, 142, 143, 144, 147, 150, 151, 201, 214, 216, 219, 227, 230, 234, 235, 236, 237, 243

L

Logaritma vi, 3, 4, 11, 15, 16, 17, 31, 39, 40, 43, 50, 55, 115
  Basis logaritma 50

O

Operasi vektor 83, 84, 85, 99, 101, 114
  Penjumlahan vektor 84, 103, 104, 105, 106, 113
  Pengurangan vektor 84, 106, 108
  Perkalian skalar dengan vektor 84, 109
Orang tua vi, 14, 254, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 277, 278

P

Peluang viii, 3, 4, 118, 213, 214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 236, 237, 238
  Aturan penjumlahan 213, 214, 215, 228
  Distribusi 3, 4, 184, 213, 214, 215, 216, 221, 222, 227, 228, 238
  Eksperimental 4
  Geometris 3, 83, 85, 101
  Kejadian saling lepas 213, 214, 215, 228, 230, 231
  Kejadian tidak saling lepas 213, 215, 228, 231
  Percobaan 71, 118, 119, 182, 207, 214, 227, 242, 243, 244
  Ruang sampel 213, 214, 215, 216, 219, 220, 226, 227, 228, 231, 233, 234
  Teoretis 4, 226, 227
  peluruhan eksponen 16, 30, 34, 38
Percobaan 71, 118, 119, 182, 207, 214, 227, 242, 243, 244
pertumbuhan eksponen 16, 27, 30, 38, 50

R

Ruang sampel 213, 214, 215, 216, 219, 220, 226, 227, 228, 231, 233, 234

S

Segitiga vii, 3, 4, 77, 84, 104, 106, 108, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 130, 131, 132, 133, 204
  Segitiga siku-siku 3, 4, 115, 116, 117, 118, 121, 122, 126, 127, 129, 130, 131, 132
  Segitiga sebangun 124
  Segitiga siku-siku sama kaki 116
  Sumbu simetri 169, 173, 174, 180

T

Tabel distribusi peluang 214, 221, 222
Teorema Phytagoras 104
Theodolit 118
Trigonometri vii, 84, 115, 116, 117, 118, 120, 126, 128, 129
  Cosinus 84, 115, 116, 117, 120, 126, 128, 130, 131, 132
  Perbandingan trigonometri 3, 4, 115, 116, 117, 118, 120, 121, 124, 126, 128, 129, 130, 132, 133

Sinus 84, 115, 116, 117, 120, 126, 128, 130, 131, 132
Sisi depan 121, 122, 123, 124, 125, 127, 131, 132
Sisi miring 121, 123, 127, 130, 131, 133
Sisi samping 117, 122, 123
Sudut istimewa 116, 117, 126, 129, 132
Tangen 116, 117, 118, 120, 121, 122, 124, 125, 130, 133, 134

U

Uang logam 216
Angka 49, 119, 139, 204, 212, 216, 217, 218, 219, 223, 226, 227, 230, 232, 235, 237
Gambar vi, viii, ix, 27, 28, 63, 70, 89, 98, 109, 125, 158, 159, 166, 167, 169, 190, 191, 193, 207, 225, 230, 237, 253

V

Vektor 3, 11, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 113, 114 Notasi vektor 88, 96
Pengurangan vii, 85, 106
Penjumlahan 68, 73, 84, 98, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 113, 213, 214, 215, 228, 231
Perkalian skalar dengan vektor vii, 108
Vektor berkebalikan 98, 101
Vektor berkebalikan 98, 101
Vektor lawan atau vektor negatif 93
Vektor posisi 98, 99, 101
Vektor satuan 98, 99, 114

Glosarium

berpikir kritis: merupakan kemampuan untuk menggunakan berbagai jenis penalaran, menggunakan pemikiran sistem, menganalisis dan mengevaluasi keadaan, berpikir reflektif, melakukan sintesis terhadap beberapa argumen untuk membuat sebuah keputusan dalam upaya penyelesaian masalah.

desmos: merupakan perangkat lunak berbasis web dan aplikasi telepon pintar yang dapat digunakan sebagai kalkulator dasar, kalkulator saintifik, kalkulator grafik, alat geometri, dan pembuat aktivitas matematika interaktif.

flipped classroom: pendekatan belajar dengan siswa menerima materi pelajaran di luar kelas (biasanya disampaikan dalam video-video pembelajaran) dan melakukan aktivitas pembelajaran yang berpusat siswa di dalam kelas (atau tatap muka).

kecakapan abad ke-21: adalah kecakapan, keterampilan, atau kompetensi yang dibutuhkan di abad ke-21, yang meliputi keterampilan hidup dan karier, keterampilan belajar dan berinovasi (berpikir kritis, komunikasi, kolaborasi, dan kreativitas), serta keterampilan informasi, media, dan teknologi.

kemampuan berpikir aras tinggi: merupakan kemampuan untuk menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta.

kolaborasi: merupakan kemampuan bekerja dengan orang lain di dalam kelompok untuk mencapai tujuan bersama.

komunikasi: merupakan kemampuan menyampaikan dan mendengarkan ide, gagasan, dan bentuk lain secara efektif.

kreativitas: merupakan kemampuan untuk berpikir (menggunakan ide yang luas membuat ide baru, serta mengelaborasi, memperbaiki, menganalisis, dan mengevaluasi ide sendiri untuk perbaikan ide tersebut) dan berkerja dengan orang lain secara kreatif, serta kemampuan untuk mengimplementasikan inovasi.

motivasi: adalah suatu kehendak atau disposisi untuk terlibat dan bertahan di tugas tertentu.

pembelajaran kooperatif: merupakan model pembelajaran yang melibatkan kelompok-kelompok kecil yang menggunakan struktur tugas, insentif, dan motif untuk menghasilkan perilaku kooperatif.

pendidikan karakter: merupakan pendidikan yang mengembangkan nilai-nilai yang khas-baik dari siswa untuk diimplementasikan ke dalam lingkungan di sekitarnya.

pengayaan: merupakan suatu kegiatan pembelajaran yang ditujukan untuk siswa yang memiliki kecepatan belajar tinggi agar mereka dapat memanfaatkan waktu belajarnya untuk memperdalam dan memperluas materi yang mereka pelajari.

penilaian: adalah kegiatan pengumpulan dan pengolahan informasi yang dimaksudkan untuk mengukur pencapaian hasil belajar siswa.

penyingkapan terbimbing: merupakan pendekatan berpusat siswa yang tujuannya untuk menciptakan suatu lingkungan belajar agar siswa mampu menemukan atau menyingkap konsep, prinsip, atau prosedur tentang konten pembelajaran tertentu dengan bimbingan yang diperlukan.

refleksi: merupakan aktivitas menganalisis pengalaman, kemampuan, atau keterampilan yang bertujuan untuk pembelajaran dan perbaikan di masa mendatang.

remedial: merupakan suatu kegiatan yang direncanakan dan dilakukan untuk memperbaiki hasil belajar bagi siswa yang mengalami kesulitan belajar.

rubrik: merupakan pedoman penilaian yang berisi aspek-aspek atau kategori-kategori penilaian yang jelas dan digunakan untuk mengukur hasil pekerjaan siswa.

tutorial sebaya: adalah strategi pembelajaran yang diterapkan guru kepada siswa untuk membantu satu sama lain belajar dan membelajarkan diri sendiri dengan mengajar.

Daftar Pustaka

Attwood, G., Bettison, I. 2019. *Pearson Edexcel International A Level: Statistics 1.* Pearson Education Limited.

Batanero, C., J Chernoff, E., Engel, J., Lee, H.S., & Sánchez, E. 2016. *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer Nature.

Brahier, D.J. 2020. *Teaching Secondary and Middle School Mathematics.* Routledge.

Brumbaugh, D.K., & Rock, D. 2010. *Teaching Secondary Mathematics*. Routledge.

Foster, C. 2012. *The Essential Guide to Secondary Mathematics: Successful and Enjoyable Teaching and Learning*. Routledge.

Goos, M., Vale, C., Stillman, G., Makar, K., Herbert, S., & Geiger, V. 2020. *Teaching Secondary School Mathematics: Research and Practice for The 21st Century.* Routledge.

Hirsch, C. R. 2008. Core-plus Mathematics: *Contemporary Mathematics in Context. Course 1 Student Edition*. Glencoe/McGraw-Hill.

Hirsch, C. R. 2008. *Core-plus Mathematics: Contemporary Mathematics in Context. Course 2 Student Edition*. Glencoe/McGraw-Hill.

Jones, G. A. (Ed.). 2006. *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (Vol. 40). Springer Science & Business Media.

Johnston-Wilder, S., & Pimm, D. 2004. *Teaching Secondary Mathematics with ICT.* McGraw-Hill Education (UK).

Larson, R. 2011. *Algebra and Trigonometry, eighth edition*. Cengage Learning.

Murdock, J., Kamischke, E., & Kamischke, E. 2007. *Discovering Algebra: An Investigative Approach, Second Edition.* Key Curriculum Press.

Pimentel, R., Wall, T. 2013. *Mathematics Core and Extended*, 3rd Edition. Cambridge IGCSE, Hodder Education

https://www.forbes.com/sites/naomirobbins/2012/01/04/a-histogram-is-not-a-bar-chart/?sh=13ebb1326d77

https://corona.jakarta.go.id/id/data-pemantauan

https://www.mathsisfun.com/activity/buffons-needle.html. Diunduh tanggal 18 Januari 2021 pukul 22.00 WIB.

https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/12%3A_Vectors_in_Space/12.1%3A_Vectors_in_the_Plane. Diunduh pada tanggal 19 Januari 2021 pukul 21.52 WIB.

https://www.maths.usyd.edu.au/u/MOW/vectors/vectors-7/v-7-1.html. Diunduh pada tanggal 19 Januari 2021 pukul 21.52 WIB.

Sharma, R.D. 2001. *Objective Mathematics Textbook*. Dhanpat Rai Publications (P) Ltd.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. 2015. *Algebra and Trigonometry.* Cengage Learning.

Sutisna, E., 2020. *Modul Pembelajaran SMA, Matematika Peminatan Kelas X.* Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Indonesia.

Tan, S. 2008. *College Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciences, seventh edition.* Thomson Brooks/Cole.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. 2013. *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based Guidance for Ages 9-19*. OUP Oxford.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Meng, N. C., & Liew, J. 2013. *New Syllabus Mathematics Textbook 1*. Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., & Chow, I. 2013. *New Syllabus Additional Mathematics Textbook*. Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Daftar Sumber Gambar

https://unsplash.com/photos/PaFEcOj8Kqo. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.10 WIB

https://unsplash.com/photos/k0KRNtqcjfw. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.12 WIB

https://unsplash.com/photos/4pc1GpZhJP0. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.14 WIB

https://unsplash.com/photos/j2c7yf223Mk. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.17 WIB

https://unsplash.com/photos/BnzqQwerUOY. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.20 WIB

https://unsplash.com/photos/FUAe5yjwqXc. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.25 WIB

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Garuda_Indonesia,_Boeing_777-300ER,_PK-GIG_-_NRT.jpg. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.30 WIB

https://www.google.co.id/maps/@2.6132654,108.4252641,4843020m/data=!3m1!1e3. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.32 WIB

https://unsplash.com/photos/_1fByLYHA_0. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.35 WIB

https://unsplash.com/photos/keHNwiEsJQs. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.38 WIB

https://www.pexels.com/photo/green-leafed-tree-1146706/. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.40 WIB

https://pixabay.com/photos/hamburger-burger-fast-food-2201748/. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.45WIB

https://kissclipart.com/french-fries-0q2q9m/ . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.50 WIB

https://www.freepik.com/free-photo/glass-cola-with-ice_1179448.htm . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.52 WIB

https://www.freepik.com/free-vector/combo-meals-poster_10346331.htm#page=1&query=combo+menu&position=2 . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 17.54 WIB

https://www.freepik.com/free-psd/brochure-concept-mock-up_8300291.htm . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.00 WIB

https://unsplash.com/photos/Ll9RwiWfQW8 . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.10 WIB

https://www.freepik.com/free-psd/blank-screen-concept-mock-up_9156419.htm . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.15 WIB

https://www.freepik.com/free-vector/dos-don-ts-prevention-infographic_7745036.htm . Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.17 WIB

https://covid19.go.id/peta-sebaran-covid19. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.06 WIB

https://unsplash.com/photos/-VjeHVFSl38 . Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.10 WIB

https://unsplash.com/photos/el-LuI0mVLo . Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.15 WIB

https://www.freepik.com/free-photo/shining-sun-clear-blue-sky_945129.htm . Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.17 WIB

https://unsplash.com/photos/Zp7ebyti3MU . Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.20 WIB

https://www.pexels.com/photo/blood-bags-on-white-background-4531304. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.25 WIB

https://spotlight.unavco.org/how-gps-works/gps-and-tectonics/gps-and-tectonics.html. Diunduh tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.32 WIB

https://www.google.co.id/maps/@2.6132654,108.4252641,4843020m/data=!3m1!1e3. Diunduh tanggal 25 Februari 2021 pukul 18.32 WIB

https://www.shutterstock.com/image-vector/bali-map-149908604 Diunduh tanggal 24 Februari 2021 pukul 18.00 WIB

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f5/Hanoi_10Ring_3D.jpg Diunduh tanggal 8 Mei 2021 Pukul 14.00 WIB

Biodata Pelaku Perbukuan

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Dicky Susanto, Ed.D
E-mail : dicky.susanto@calvin.ac.id
Akun Facebook : Dicky Susanto
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 8, RMCI. Jl. Industri Blok B14 Kav. 1 Kemayoran, Jakarta Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Head of Instructional Design dan Dosen, Calvin Institute of Technology (2019–sekarang)
2. Head of Instructional Design dan Dosen, Indonesia International Institute of Life Sciences (2016–2019)
3. Education Consultant, Curriculum Developer and Teacher Trainer (2015–sekarang)
4. Postdoctoral Research Associate, North Carolina State University (2012–2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2004-2009)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2002-2003)
3. S1: Program Studi Teknik Kimia, Institut Teknologi Indonesia, Tangerang (1992-1997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Pengarah Materi untuk Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Kelas Awal (Modul Belajar Siswa, Modul Guru, dan Modul Orang Tua) (2020-2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. "Coordinating Multiple Composite Units as a Conceptual Principle in Time Learning Trajectory" (2020)

Nama Lengkap : Theja Kurniawan
E-mail : theja.kurniawan@santa-laurensia.sch.id
Akun Facebook : Theja Kurniawan
Alamat Kantor : Jalan Sutera Utama No. 1, Alam Sutera, Tangerang Selatan 15325
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

1. Kepala SMA Santa Laurensia (2013-sekarang)
2. Head of Mathematics Department, Sekolah Santa Laurensia (2006-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan, Universitas Pelita Harapan (2005-2007)
2. S2: Program Studi Manajemen Operasi, PPM (1999-2001)
3. S1: Program Studi Teknik Sipil, Universitas Tarumanagara (1994-1999)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Tidak ada.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Savitri K. Sihombing, M.Sc.
E-mail : savitri.sihombing@gmail.com
Akun Facebook : Savitri Sihombing
Alamat Kantor : Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri Jalan Scientia Boulevard Barat Blok DRWB no 8 Sektor Ruko Darwin, Summarecon Serpong Tangerang, Banten 15334
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Tim Akademik Matematika, Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (2003-2005)
2. S1: Program Studi Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia (1996-2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 2 Budaya Hidup Sehat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 3 Makhluk Hidup dan Benda Mati,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 3 Makhluk Hidup dan Benda Mati,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 2 Pancaindra dan Lingkungan,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 2 Merawat Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 2 Denah Lingkunganku, Modul,* Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 2 Bahan Dasar*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan*

Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Eunice Salim, M.Ed.
E-mail : esalim@asu.edu
Akun Facebook : Eunice Salim
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 13, RMCI. Jl. Industri Blok B14 Kav. 1. Kemayoran, Jakarta Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. *Chief Networking Officer*, Paideia Educational Solutions, Bali, Indonesia (2020-sekarang)
2. Staf Kurikulum, Sekolah Kristen Calvin, Jakarta, Indonesia (2019-sekarang)
3. Guru Kelas 4 SD, Indian Hills Elementary, Gallup, USA (2016-2019)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Learning Design and Technologies, Arizona State University, Phoenix, USA (2017-2019)
2. S1: Program Studi Elementary Math Education, Calvin University, Grand Rapids, USA (2012-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 4 Perasaanku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 4 Mainan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 4 Mainan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 4 Alat yang Membantu Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 4 Alat yang Membantu Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru,*

dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 4 Siklus Air*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 4 Siklus Air,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 4 Pelangi*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 4 Pelangi*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 4 Bekerja di Laut,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 4 Bekerja di Laut*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
18. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 4*

Merayakan Keberhasilan, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

19. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 4 Merayakan Keberhasilan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Marianna Magdalena Radjawane, M.Si.
E-mail : marianna.radjawane@gmail.com
Akun Facebook : Marianna Magdalena Radjawane
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika dan IPAC

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Jarak Jauh STKIP Terang Bangsa Timika (2020-sekarang)
2. Konsultan Pendidikan, Pengembang Kurikulum dan Pelatih Guru (2013-sekarang)
3. Guru Fisika SMA Cita Buana Jakarta (2013-2015)
4. Divisi Pelatihan Guru Surya Institute (2011-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Fisika, Institut Teknologi Bandung (1990-1993)
2. S1: Program Studi Astronomi, Institut Teknologi Bandung (1983-1989)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan*

Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 2 Serangga dan Hewan Kecil*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 2 Serangga dan Hewan Kecil*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 3 Kesehatan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 3 Merawat Hewan dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan*

Lingkungan Kita Subtema 3 Merawat Hewan dan Lingkungan, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 3 Pulauku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 3 Pulauku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 3 Karakteristik Benda Cair*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 3 Karakteristik Benda Cair,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 3 Awan, Modul,* Kemdikbud, Jakarta.
15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 3 Awan, Modul*, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 3 Petani,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 3 Petani,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
18. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru,*

dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 3 Hari Istimewa Keluarga, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

19. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 3 Hari Istimewa Keluarga, Modul*, Kemdikbud, Jakarta.
20. *Contributor in Excel in Science Grade 4*, Oxford University Press (2018)
21. *Science Gasing Kelas 3-6*, Penerbit Kandel (2013)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Ummy Salmah, M.Pd.,M.Sc
E-mail : ummy.salmah@staff.qitepinmath.org
Akun Facebook : Ummy As Syifa
Alamat Kantor : L. Kaliurang KM 6, Sambisari, Condongcatur, Depok Sleman, DIY
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika, Fakultas Tarbiyah UIN Alauddin Makassar (2016-2017)
2. Training Specialist, SEAMEO Regional Centre for QITEP in Mathematics, Yogyakarta (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Science and Mathematics Education, Curtin University (2015)
2. S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2012-2014)
3. S1: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Makassar (2006-2010)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 1 Keluarga*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 3 Makhluk Hidup dan Benda Mati*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 3 Pancaindra Subtema 2 Pancaindra dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 2 Pancaindra dan Lingkungan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 2 Merawat Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 2 Merawat Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 2 Denah Lingkunganku,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 2 Denah Lingkunganku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru,*

dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 2 Bahan Dasar, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 2 Bahan Dasar,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional,* Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Apriana Toding, Ummy Salmah, Heribertus Rinto Wibowo (2020) *Modul Pembelajaran Jarak Jauh. Implementasi Teknology MIMO Relay System sebagai Inovasi IoT dalam Mendukung Pembelajaran Jarak Jauh di Daerah 3T pada Kondisi Covid di Indonesia* (Proyek Ideathon Indonesia 2020).
18. Darmowijoyo dan BIMPoME 2012 (2013), *Persamaan Diophantine dan Aplikasinya*. Unit Perpustakaan PPS Universitas Sriwijaya, Palembang.

19. BIMPoME 2012 (2013), *Pemecahan Masalah Matematika*. Excellent Publishing, Palembang.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "STEM+Computational Thinking" (2021-sedang dalam proses)
2. "Teaching Mathematics during Pandemic" (Teacher Perceptions) (2020)
3. "Mathematics Teachers' Perception and Readiness in Implementing STEM Education" (2017)
4. "Mathematics and Science Teachers' Perceptions and Readiness in Implementing Curriculum 2013 in Indonesia" (2015)
5. "Desain Pembelajaran Penjumlahan Bilangan 1-20 dengan Melibatkan Kemampuan Struktur Spasial (*Spatial Structuring Ability*) Siswa Kelas 1 Sekolah Dasar"(2014)

Nama Lengkap : Ambarsari Kusuma Wardani, M.Pd.
E-mail : ambarsariks_uin@radenfatah.ac.id
Akun Facebook : Ambar Kusuma
Alamat Kantor : Jl. Prof. K. H. Zainal Abidin Fikri, Km 3.5, Palembang.
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, UIN Raden Fatah Palembang (2016-sekarang)
2. Guru Matematika, SMA Negeri 17 Palembang (2014-2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2012-2014)
2. S1: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2007-2011)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 4 Perasaanku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 1 Keluarga*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 1 Tanaman yang Tumbuh di Lingkungan Saya*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 1 Kegunaan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 1 Kegunaan Pancaindra*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 1 Merawat Diri Sendiri*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 1 Merawat Diri Sendiri*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru,*

dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 1 Denah Rumahku, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 1 Denah Rumahku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
11. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 1 Karakteristik Benda Padat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
12. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 6 Benda dan Materi Subtema 1 Karakteristik Benda Padat*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
13. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 1 Matahari dan Bumi*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
14. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 1 Matahari dan Bumi*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
15. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 8 Profesi Subtema 1 Pelayanan Jasa*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
16. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 1 Pelayanan Jasa*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
17. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 9 Perayaan Subtema 1 Hari Raya Agama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
18. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru,*

dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 9 Perayaan Subtema 1 Hari Raya Agama, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

19. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 1 Hari Raya Agama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
20. Darmowijoyo dan BIMPoME 2012 (2013), *Persamaan Diophantine dan Aplikasinya.* Unit Perpustakaan PPS Universitas Sriwijaya, Palembang.
21. BIMPoME 2012 (2013), *Pemecahan Masalah Matematika*. Excellent Publishing, Palembang.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "Pengembangan Soal Pemecahan Masalah Matematika dengan Konteks Islami untuk Siswa Sekolah Menengah Pertama" (2020)
2. "Profil Soal Model PISA Pada Tugas Akhir Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika UIN Raden Fatah Palembang" (2019)
3. "Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah dan Disposisi Matematis melalui Pendekatan Matematika Realistik bernuansa Etnomatematik Suku Anak Dalam (PMRE SAD)" (2018)
4. "Penerapan Desain Pembelajaran Tematik Integratif pada Kelas VI SD Materi Nilai Rata-Rata" (2016)
5. "Pengembangan Soal Model PISA untuk Program Pengayaan SMP" (2014)

Biodata Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
E-mail : sunardi.fkip@unej.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : FKIP Universitas Jember, Jalan Kalimantan Nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
2. (1983–sekarang)
3. Dosen Penguji Disertasi S3 Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang dan Universitas Negeri Surabaya (2016–sekarang)
4. Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember (2007–2016)
5. Ketua Tim Pengembangan Kurikulum Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (2006)
6. Guru Matematika di SMA (1981–1985)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya tahun masuk 1999
2. S2: Pendidikan Matematika IKIP Malang tahun masuk 1992
3. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang tahun masuk 1977

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir):

1. *Buku Guru dan Buku Siswa Matematika untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X* (2019)
2. *Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII* (2018) (Editor)
3. *Matematika Fisika 1* (2018)

4. *Matematika Fisika 2* (2018)
5. *Strategi Belajar Mengajar IPA* (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. *Penalaran Matematika, Himpunan, Relasi, dan Fungsi* (2018)
2. *Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang* (2014)
3. *Strategi Belajar Mengajar Matematika* (2012)
4. *Model of Teaching and Learning* (2011)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. "Development of the Spatial Visual Oriented Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Elementary Students" (2020)
2. "The Development of Tangram-Based Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Junior High School Students in Solving Two-Dimentional Figure Problems" (2020)
3. "The Geometry Anxiety of Students' Visualization, Analysis, and Informal Deduction Levels in Solving Geometry Problem" (2019)
4. "The Profile of Student's Anxiety in Solving the Critical Thinking Problem on Geometry According to Van Hiele Theory" (2019)
5. "Developing Rom (Realistic Outdoor Mathematics) Learning Model For Elementary School Students" (2018)
6. "Characteristics of Students' Metacognition Process At Informal Deduction Thinking Level in Geometry Problems" (2018)
7. "Analysis of Students' Mathematics Performance in Solving the PISA Standard Based Test Item Using a Qualitative Content Analysis Method" (2018)
8. "Thinking Process of Visual-Spatial Intelligence of 15-Year-Old Students in Solving PISA Standard Problems" (2018)
9. "Mathematical Communication Process of Junior High School Students Based on Keirsey Personality Type In Solving Open Geometry Problems" (2018)
10. "The Identification of van Hiele Level Students on the Topic of Space Analytic Geometry" (2018)
11. "Spatial Intelligence on Solving Three Dimensional Geometry Object Through Project Based Learning" (2018)

12. “Developing Mathematics Learning Model Using Realistic Approach and Outdoor Environment for Elementary School Students” (2018)
13. “Ethnomathematics Activities of Coffee Farmers in Sidomulyo Jember Area as Project Student Sheet” (2018)
14. “The Uniqueness of Visual Levels in Resolving Geometry Shape and Space Content Based on Van Hiele’s Theory” (2018)
15. “The Students’ Thinking Process on Mathematics Problem Solving Through Scaffolding” (2017)
16. “The Thinking Process in Constructing the Concepts of Linear Quantitatives Two Variable” (2017)
17. “Student’s Mathematics Creative Thinking Skill in Terms of Logical Mathematical Intelligence” (2017)
18. “Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Realistik Terintegrasi Pendekatan Saintifik Berbasis Lingkungan Luar Kelas pada Topik Kesebangunan bagi Siswa SMP” (2016)
19. “Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Realistik Luar Sekolah Berbasis Lingkungan dan Budaya Khas Jember untuk Meningkatkan Pendidikan Karakter Unggul bagi Siswa SMK” (2014)
20. “Pengembangan Karakter Teliti, Konsisten, dan Kreatif pada Siswa SMP Melalui Pembelajaran Geometri dengan Pendekatan Realistic Mathematics Education Berbasis Lesson Study” (2013)
21. “Pengembangan Model Pembelajaran Kreatif dan Inovatif untuk Meningkatkan Kualitas Proses Pembelajaran dan Hasil Belajar Mata Pelajaran Ujian Nasional Siswa SMA di wilayah Provinsi Jawa Timur 3” (2012)
22. “Penguasaan Siswa Terhadap Kompetensi Mata Pelajaran Ujian Nasional, Gambaran Keberhasilan, Kegagalan, dan Faktor Penyebab serta Alternatif Solusinya di Wilayah Provinsi Jawa Timur 3” (2011)

Nama Lengkap : Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
E-mail : alazhari.masta@upi.edu
Akun Facebook : Al Azhary Masta
Alamat Kantor : FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No .229, Isola, Kec. Sukasari, Kota Bandung, Jawa Barat 40154
Bidang Keahlian : Matematika Analisis

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

1. Dosen Program Studi S1 Program Studi Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia (2015–sekarang)
2. Dosen LB Universitas Telkom Tahun (2013–2019)
3. Pembina Tim Olimpiade SMP Provinsi Jawa Barat Tahun 2013–2019
4. Pembina ON MIPA Mahasiswa Universitas Pendidikan Indonesia Tahun 2013 s.d sekarang.
5. Ketua Riset Bidang Analisis Departemen Pendidikan Matematika FPMIP UPI Tahun 2021–sekarang.
6. Pembina Team SMP Kemendikbud pada Bulgaria International Mathematics Competition (BIMC) Tahun 2013
7. Pembina Team SMP Kemendikbud pada AITMO (Asian Inter-cities Teenagers Mathematics Olympiad) Tahun 2013
8. Pembina Team SMP Kemendikbud pada Korea International Mathematics Competition (KIMC) Tahun 2014

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Matematika, Institut Teknologi Bandung, tahun masuk 2013
2. S2: Matematika, Institut Teknologi Bandung, tahun masuk 2011
3. S1: Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, tahun masuk 2007

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. *Buku digital pusat perbukuan untuk Program kelas IV, V, dan VI* (2019)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. *Math Project untuk SD/MI Kelas I: Pembelajaran Matematika Berbasis Saintifik* (2014)
2. *Math Project untuk SD/MI Kelas IV: Pembelajaran Matematika Berbasis Saintifik* (2014)
3. *Math Project untuk SD/MI Kelas VII: Pembelajaran Matematika Berbasis Saintifik* (2014)
4. *Buku Guru dan Buku Siswa Matematika untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X* (2019)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. “A Note on Inclusion Properties of Weighted Orlicz Spaces” (2020)
2. “Several Properties of Discrete Orlicz Spaces” (2020)
3. “A Note on Generalized Holder’s Inequality in *p*-summable Sequence Spaces” (2020)
4. “Hölder’s Inequality in Discrete Morrey Spaces” (2020)
5. “Generalized Holder’s Inequality in Orlicz Sequence Spaces” (2020)
6. “Sifat Inklusi dan Perumuman Ketaksamaan Holder pada Ruang Barisan Orlicz” (2020)
7. “Third Version of Weak Orlicz–Morrey Spaces and Its Inclusion Properties” (2019)
8. “Sufficient and Necessary Conditions for Generalized Hölder's Inequality in p-summable Sequence Spaces” (2019)
9. “Sufficient and Necessary Conditions for Holder’s Inequality in Weighted Orlicz Spaces” (2019)
10. “Generalized Holder’s Inequality in Orlicz Spaces” (2019)
11. “The Sufficient Condition for Inclusion Properties of Discrete Weighted Lebesgue Spaces” (2018)
12. “Inclusion Properties of Orlicz Spaces and Weak Orlicz Spaces Generated by Concave Function” (2018)
13. “Generalized Holder’s Inequality in Morrey Spaces” (2018)

14. “On Inclusion Properties of Two Versions of Orlicz-Morrey Spaces” (2018)
15. “Kekonvergenan dalam Ruang Lebesgue Lemah dan Ekuivalensinya dengan Kekonvergenan dalam Ruang Lebesgue” (2018)
16. “An inclusion Property of Orlicz and Weak Orlicz Spaces” (2017)
17. “Inclusion Properties of Generalized Morrey Spaces” (2017)
18. “An Inclusion Property of Orlicz-Orlicz Spaces” (2017)
19. “Uniformly Convex and Strictly Convex Orlicz Spaces” (2015)
20. “An Inclusion Property of Orlicz Spaces” (2015)

Biodata ilustrator

Nama Lengkap : Faris Majduddin Naufal, S.M
E-mail : farismnaufal@gmail.com
Akun Facebook : Faris Naufal
Alamat Kantor : Monoponik Studio. Jl. Otto Iskandar Dinata No. 458, Bandung
Bidang Keahlian : Desain Grafis & Ilustrasi

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Co Founder & Principal Designer, Monoponik Studio (2012-sekarang)
2. Marketing Staff (Internship), Mahanagari Nusantara (2012)
3. Visual Artist / Illustrator (2010-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Manajemen Bisnis, Telkom University (2009-2015)

Karya/Pameran/Eksibisi dan Tahun Pelaksanaan (10 tahun terakhir)

1. 111 Buya Hamka Exhibition, Universitas Al Azhar, Jakarta (2019)
2. All The Small Things, Qubicle, Jakarta (2017)
3. Seek A Seek Exhibition (with Monoponik), Dia.Lo.Gue, Jakarta (2016
4. Reset Collective Exhibition, N-Workshop, Yogyakarta (2016)

5. Super Robot Day, Bandung (2015)
6. Canstop, Gardu House, Jakarta (2014)
7. Rupanada (with Monoponik), Jogja Gallery, Yogyakarta (2014)
8. 10th Pictoplasma, Berlin, Jerman (2014)
9. Ace&King (Aceking Sketch Squad), Sanggar Mitra, Bandung (2014)
10. Odessa Draw, Odessa, Ukraina (2013)
11. Indonesia Kreatif (PPKI), Epicentrum Walk, Jakarta (2012)
12. Indonesia Kreatif (PPKI), JEC, Jakarta (2011)
13. Postcard Untuk Sahabat (Tugitu Unite), Gedung Kesenian Solo, Solo (2011)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "*Pengaruh Word of Mouth Marketing* Melalui Media Twitter @ FLAMEONfootmate Terhadap Keputusan Pembelian Konsumen Tahun 2014" (2015)

Biodata Penyunting Naskah

Nama Lengkap : Tri Hartini, S.S.
E-mail : trihartini2703@gmail.com
Akun Facebook : Tri Hartini
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Editing buku/naskah, proof read

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

Menjadi editor lepas di beberapa penerbit di Yogyakarta

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

Fakultas Sastra/Ilmu Budaya Universitas Gadjah Mada Yogyakarta (1992-1998) jurusan Sastra Indonesia spesialisasi bidang Linguistik.

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

Salam 3 Jari Leadership ala Jokowi. 2014. Yogyakarta: Penerbit Kanisius

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

Tidak ada

Buku yang Pernah ditelaah, direviu, dibuat ilustrasi dan/atau dinilai (10 tahun terakhir):

Tidak ada

Informasi Lain

selama 20 tahun bekerja sebagai editor, telah menyunting banyak buku dengan berbagai jenis tema seperti keagamaan, politik, sains, humaniora (filsafat, sosial, hukum, bahasa, sastra, seni) dan lain-lain, baik naskah asli maupun terjemahan, di beberapa penerbit di Yogyakarta

Biodata Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi

E-mail : muhafir@gmail.com

Akun Facebook : Muhammad Firdaus Tjl

Alamat Kantor : -

Bidang Keahlian : Desain Grafis

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020-2021)
2. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019-2020)
3. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018-2019)
4. *Audio Visual Designer* di Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016-2018)
5. *Intern Junior Art Director* di Syafa'at Marcomm (2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Penduan Praktis Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, jakarta
5. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Pedoman Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.